

音階的制訂

鄭嘉緯

國立清華大學資訊工程所博士班

d9762806@oz.nthu.edu.tw

音樂在人們生活中扮演著不可或缺的角色，許多經典的樂章更是讓人深深著迷，每每沉醉在優美的旋律當中。而這些美麗的樂章都是由音符所構成，每個音符都代表著一個音階及其長度。那麼，音階又是從何而來的呢？

以下是 Amazing Grace 這首歌的簡譜，我們現在就來談談這裡面的 Do、Re、Mi…等音階，究竟在物理上的意義為何。

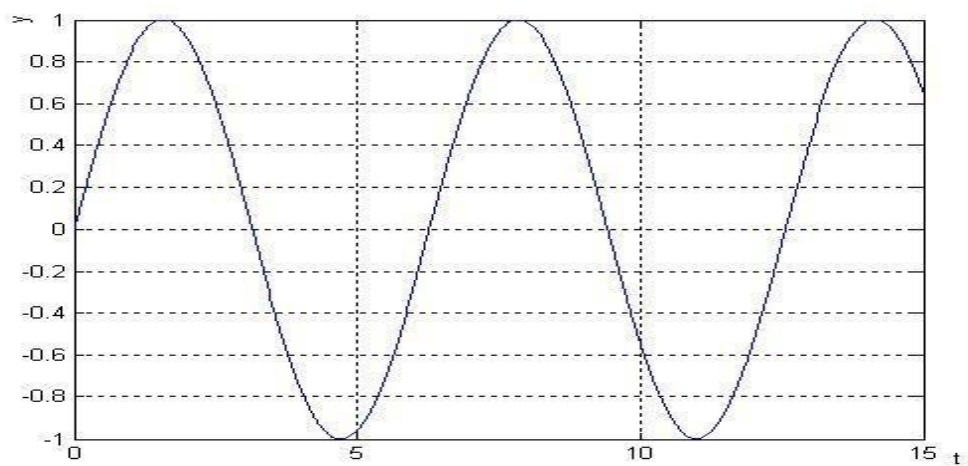
AMAZING GRACE

1=C 3/4

5		$\dot{1}$	-	$\underline{\dot{3}\dot{1}}$		$\dot{3}$	-	$\dot{2}$		$\dot{1}$	-	6		5	-	5		$\dot{1}$	-	$\underline{\dot{3}\dot{1}}$		$\dot{3}$	-	$\underline{\dot{2}\dot{3}}$		$\dot{5}$	-	
3		3	-	5		b7	-	b7		4	-	4		3	-	3		3	-	5		$\dot{1}$	-	5		5	-	
A- maz- ing grace! How sweet the sound, That saved a wretch like me!																												
5		$\dot{1}$	-	$\dot{1}$		$\dot{1}$	-	$\dot{1}$		6	-	6		$\dot{1}$	-	$\dot{1}$		5	-	5		$\dot{1}$	-	$\dot{1}$		7	-	
1		1	-	5		1	-	5		4	-	4		1	-	5		1	-	3		5	-	$\dot{1}$		5	-	
$\underline{\dot{2}\dot{3}}$		$\dot{5}$	-	$\underline{\dot{3}\dot{1}}$		$\dot{3}$	-	$\underline{\dot{3}\dot{2}}$		$\dot{1}$	-	6		5	-	5		$\dot{1}$	-	$\underline{\dot{3}\dot{1}}$		$\dot{3}$	-	$\dot{2}$		$\dot{1}$	-	
5		3	-	5		b7	-	b7		4	-	4		3	-	3		3	-	5		$\dot{1}$	-	4		3	-	
I once was lost, but now I'm found, was blind, but now I see.																												
7		5	-	$\dot{1}$		$\dot{1}$	-	$\dot{1}$		6	-	6		$\dot{1}$	-	$\dot{1}$		5	-	5		$\dot{1}$	-	7		$\dot{1}$	-	
5		1	-	5		1	-	5		4	-	4		1	-	5		1	-	1		5	-	5		1	-	

圖一：Amazing Grace 的簡譜

事實上，每個音符都對應了一個頻率，假設我們以信號產生器，來產生一個頻率為 262 Hz 的正弦波，並透過電腦的揚聲器來發出這個正弦波，這將在空氣中產生振動並形成聲波，傳達到我們的耳朵後，我們便會聽到一個音高相當於中央 C (Do) 的聲音。下列圖二是一個正弦波。



圖二：正弦波之波形圖

所謂中央 C，就是我們在鋼琴中央代表 Do 的琴鍵，如圖三紅色的圈起來的部份：



圖三：鋼琴的中央 C

鋼琴的中央 C 對應於如下的正弦波：

$$\cos(2\pi(262)t)$$

其中，262 所代表的是頻率，那麼其他的音階所代表的頻率又是多少呢？

對人耳而言，我們對於音高的感受是呈對數性的關係，舉例來說：對於 262 Hz 到 524 Hz 的差距，與 524Hz 到 1048 Hz 之間的差距，對於人耳的感受而言是相同的，因此我們將基頻的頻率倍數訂為高八度的音。也就是說，高八度的 C 的頻率是中央 C 的兩倍。而我們又在八度音之間將其分為十二個等分，所以每個音之間的差距為 $r = \sqrt[12]{2} \approx 1.05946309$ 倍，這十二個等分又分別代表著七個全音與五個半音，全音的部份即是我們都熟悉的 Do、Re、Mi、Fa、Sol、La 與 Si，這個方法稱為十二平均律(Twelve-Tone Equal Temperament)。

在十二平均律中，若以某個已知頻率的音階 P_a 為基準，我們可以求得任意一個音階 P_n 的基音頻率的公式如下：

$$P_n = P_a \times 2^{\frac{n-a}{12}}$$

舉例來說，若我們已知中央 C 的頻率為 262 Hz，而它在鋼琴上的位置是從左數來第 40 個鍵，則第 42 個鍵的中央 D(Re)的音高為

$$P_{42} = 262_{\text{Hz}} \times 2^{\frac{42-40}{12}} \approx 294.08_{\text{Hz}}$$

因此我們可以利用相同的方式，推導出所有音階與頻率之關聯性。於是我們可以得到一張音階與基頻的對應關係如下表：

C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B
262	277	294	311	330	349	370	392	415	440	466	494

表一：中央 C 部份音階之頻率對應關係

而這樣的表現又代表著什麼涵義呢？首先由鋼琴的發聲原理談起，當我們按下鋼琴中央 C 的琴鍵時，會牽動鋼琴內部的機關，使擊弦錘對著琴弦進行擊打並發出聲音。此時我們可以想像，不僅僅是弦被擊打的部位在振動，而是透過能量的傳遞，整條弦的每個位置都在振動，因此在弦上產生了駐波，若設 f 為頻率，

v 為波的行進速度， λ 為波長， L 為弦長，當駐波產生時， $L = n\left(\frac{\lambda}{2}\right), n \in N$ ，則

我們可以推導出下列公式：

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{nv}{2L}$$

也就是說，頻率 f 會隨著 n 成正比，當 $n=1$ 時頻率為最低，我們稱之為基頻或者是基音(fundamental frequency)， $n \geq 2$ 之後的頻率被稱之為泛音(harmonics)。

得知了音階與頻率的關係之後，我們也許會問，那麼每個音高的頻率又是怎麼訂定的呢？

根據歷史上的記載，十二平均律最早是由明代的音樂家朱載堉(1536-1610)在著作《律呂精義》與《樂律全書》中所提出，但當時並沒有受到採用並廣泛使用。直到十九世紀時西方音樂的傳入，才將這個觀念在中國傳開來。而西方國家對於十二平均律的概念則是在 1722 年，由澳洲音樂家 Arnold Schoenberg 所提出的。

目前國際上使用的標準，並不是以中央 C 為基準，而是將中央 A(La)的頻率訂為 440 Hz，稱為 A440。這個標準幾乎適用於所有的樂器。但是，此標準並非從一開始就存在的。在十八世紀以前，不止是國家之間所使用的頻率標準不同，甚至可能在同一個國家中，平民和貴族所使用音高的標準也不盡相同。到了十八世紀，人們開始使用音叉當作工具來進行樂器的調音，但對於樂器的音高仍然沒有一個公認的標準，例如韓德爾(George Frederic Handel, 1685-1759)在 1740 年所使用的中央 A 的音叉，其頻率是 422.5 Hz，但到了 1780 年，同樣代表著中央 A 的音叉，頻率變成了 409 Hz。在十八世紀間，中央 A 的頻率一直在 400 Hz 到 450Hz 之間做變動。



圖四：調音用音叉

直到 1939 年，在一個國際會議中提出將中央 A 定為 440 Hz，而到了 1955 年，國際標準化組織(International Organization for Standardization, ISO) 將其納入了 ISO 16，從此 A440 成為了國際間調校樂器音高的一個重要標準。

【參考資料】

1. 《古典樂理入門》，林怡君，世界文物出版社
2. 《音樂基本樂理》，周茹萍，大坤出版社
3. 《New Transformations: Beyond P, I, R, and RI》, Larry Solomon