

我家也有莫札特

許介彥

大葉大學電機工程學系

chs@mail.dyu.edu.tw

幾年前有一部喜劇電影叫做「我家也有貝多芬」(英文片名為 *Beethoven*)，片中的「貝多芬」是隻大狗，牠慵懶的眼神和不時流口水的畫面讓人看了印象深刻。音樂上真正的貝多芬已長眠於維也納近兩百年了，現代科技再怎麼進步也無法令其復生；然而拜電腦之賜，我們卻不難將「莫札特」請到家中來為我們作曲。看完本文後，您就知道此言不虛。

先從擲骰子談起。一顆正常的骰子有六面，點數由 1 至 6，投擲後每一面出現的機率都是 $1/6$ 。如果我們同時擲兩顆骰子，並且將所得的兩個點數相加，可能的結果最小為 2，最大是 12，不過 2 至 12 這十一個數並不是每個數出現的機率都相等，例如 5 出現的機率就比 12 出現的機率來得大。

有心人不難在骰子的製作過程中利用某些技術來影響各個點數出現的機率。假設張三製作骰子的技術高超，可以讓一顆骰子的每一面出現的機率為任何想要的值（當然，六個面出現的機率總和仍是 1），而他今天接到一張訂單，希望訂製兩顆骰子使其投擲後的點數和為 2 至 12 這十一個數中任一數的機率都相等（都是 $1/11$ ），他應該怎麼分配這兩顆骰子的各面出現的機率呢？

由於當兩顆骰子的點數和為 2 時，每顆骰子的點數一定都是 1，而當兩顆骰子的點數和為 12 時，每顆骰子的點數一定都是 6，因此如果真的有這樣兩顆骰子能讓所擲出的點數和為 2 至 12 這十一個數中任一數的機率都相等，都是 $p = 1/11$ ，而且這兩顆骰子擲出 1 的機率分別是 u 和 v ，擲出 6 的機率分別是 x 和 y ，那麼我們可以肯定 $p = uv = xy$ 。

考慮這兩顆骰子的點數和為 7（發生的機率為 p ）的情形；由於兩顆骰子中除了一顆為 1 另一顆為 6 的情形外，還有其他可能（如 3 與 4、2 與 5 等），因此 $p > uy + vx$ ，然而

$$uy + vx = u\left(\frac{p}{x}\right) + \left(\frac{p}{u}\right)x = p\left(\frac{u}{x} + \frac{x}{u}\right) \geq 2p \quad \left(\text{因為 } a + \frac{1}{a} \geq 2, \forall a > 0\right)$$

我們導出了 $p > 2p$ 的荒謬結論，由此可知這樣的兩顆骰子根本不可能存在，無論張三的技術多麼高明也是枉然。

如果張三又接到一張訂單，也要求他製作兩顆骰子，這次是希望這兩顆骰子投擲後可能的各點數和（即 2 至 12）發生的機率與投擲正常的兩顆骰子時一模一樣，而且每顆骰子的每一面出現的機率也都是 $1/6$ ，不過每顆骰子的點數必須與正常的骰子有所不同（即不能是 1, 2, 3, 4, 5, 6，但必須都是正整數），他有沒有辦法可以達成使命呢？

這個問題比較複雜，我們先再談談正常的骰子。如果我們同時投擲兩顆正常骰子，其中一顆得 a ，另一顆得 b ，我們可以將投擲結果記作 (a, b) ；由於 a 可能是 1 至 6 間的任何一數，

b 也可能是 1 至 6 間的任何一數，因此總共可搭配出 (1, 1), (1, 2), (1, 3), ..., (6, 6) 等 36 種可能的結果；如果我們要將這 36 種情形全部列出來，過程將很類似當我們將多項式 $(x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)$ 與 $(x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)$ 相乘時的情形；由於第一個多項式的每一項必須與第二個多項式的每一項相乘，因此乘積總共包含了 36 項（不將同類項合併的話）：

$$(x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6) = \underbrace{x^1x^1 + x^1x^2 + x^1x^3 + \cdots + x^6x^6}_{36 \text{ 項}}$$

上式的等號右邊經過同類項合併後可得

$$x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^7 + 5x^8 + 4x^9 + 3x^{10} + 2x^{11} + x^{12} \quad (1)$$

這是一個很有趣的式子，它包含了許多我們所關心的資訊；由 (1) 式我們可以「讀出」兩顆骰子的點數和總共有 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 等十一種可能，發生的情形分別有 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1 種（因此發生的機率分別為 $1/36, 2/36, 3/36, \dots, 1/36$ 等）。

再看一個例子。如果某兩顆骰子的六個面點數分別為 1, 1, 2, 2, 3, 3 和 1, 2, 4, 4, 6, 6，那麼所對應的多項式分別是 $(x^1 + x^1 + x^2 + x^2 + x^3 + x^3)$ 和 $(x^1 + x^2 + x^4 + x^4 + x^6 + x^6)$ ，相乘得

$$\begin{aligned} & (x^1 + x^1 + x^2 + x^2 + x^3 + x^3)(x^1 + x^2 + x^4 + x^4 + x^6 + x^6) \\ &= 2x^2 + 4x^3 + 4x^4 + 6x^5 + 4x^6 + 8x^7 + 4x^8 + 4x^9 \end{aligned}$$

我們由上式可知這兩顆骰子的點數和總共有 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 等八種可能，發生的機率分別為 $2/36, 4/36, 4/36, 6/36, 4/36, 8/36, 4/36, 4/36$ 等。

現在我們可以幫張三解決他所面臨的問題了；他相當於要找到兩個多項式 $f(x)$ 與 $g(x)$ 使得它們的乘積為 (1) 式，而且 $f(1) = g(1) = 6$ （因為每顆骰子各有六面），而且 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都不能是 $(x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)$ ；這並不難辦。

首先我們將 (1) 式因式分解為

$$x^2(x+1)^2(x^2+x+1)^2(x^2-x+1)^2 \quad (2)$$

由於每顆骰子每一面的點數須為正整數，不能是 0，因此 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都不能有常數項（即最低次項不能是 x^0 ），可見 (2) 式最前面的 x^2 的兩個 x 必須平均分配給 $f(x)$ 和 $g(x)$ 各一個；又由於 $f(1) = g(1) = 6$ ，我們推知 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都必須含有 $(x+1)(x^2+x+1)$ 的因式，因此 (2) 式真正有彈性可自由分配的就只剩下最後面的 $(x^2-x+1)^2$ 而已，可能的分配方式只有兩種，一種是讓 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都含有 $(x^2-x+1)^1$ 的因式，不過這樣一來將導致 $f(x)$ 和 $g(x)$ 完全相同，正是正常骰子的情形；另一種可能是將 $(x^2-x+1)^2$ 全部歸給 $f(x)$ 和 $g(x)$ 其中一方，此時的兩個多項式為

$$\begin{aligned} x(x+1)(x^2+x+1) &= x + 2x^2 + 2x^3 + x^4 \\ x(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)^2 &= x + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^8 \end{aligned}$$

因此張三應該製作出兩顆點數分別是 1, 2, 2, 3, 3, 4 和 1, 3, 4, 5, 6, 8 的骰子。由上面的推論過程我們知道這其實是唯一的作法（如果不限定每個點數須為正整數的話還有其他作法）。

拉拉雜雜扯了這麼多「閒話」，您一定在納悶：到底「莫札特」在哪兒？我們現在正式進入本文的正題。音樂大師莫札特（W. A. Mozart，1756–1791）在其短暫的一生裡除了為世人留下許多偉大的作品外，在某些較輕鬆的曲子裡也展現了他詼諧風趣的一面。他在 1787 年曾經為一個音樂遊戲創製了 272 個小節的音樂，這個遊戲的目標是利用這些預製的小節來隨機組合出一段樂曲；每段樂曲是由 Minuet 和 Trio 兩個部分組成，前半段的 Minuet 包含了 16 個小節，每個小節有 11 個事先規畫好的可能的選擇（這部分總共用到了 $16 \times 11 = 176$ 個小節，編號 1 至 176，見下表），採用哪個小節是由投擲兩顆骰子所得的點數和（2 至 12）臨時決定；樂曲後半段的 Trio 同樣包含了 16 個小節，每個小節有 6 個可能的選擇（這部分有 $16 \times 6 = 96$ 個小節，編號 1 至 96），採用哪個小節是由投擲一顆骰子所得的點數（1 至 6）來決定。

Minuet

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	96	22	141	41	105	122	11	30	70	121	26	9	112	49	109	14
3	32	6	128	63	146	46	134	81	117	39	126	56	174	18	116	83
4	69	95	158	13	153	55	110	24	66	139	15	132	73	58	145	79
5	40	17	113	85	161	2	159	100	90	176	7	34	67	160	52	170
6	148	74	163	45	80	97	36	107	25	143	64	125	76	136	1	93
7	104	157	27	167	154	68	118	91	138	71	150	29	101	162	23	151
8	152	60	171	53	99	133	21	127	16	155	57	175	43	168	89	172
9	119	84	114	50	140	86	169	94	120	88	48	166	51	115	72	111
10	98	142	42	156	75	129	62	123	65	77	19	82	137	38	149	8
11	3	87	165	61	135	47	147	33	102	4	31	164	144	59	173	78
12	54	130	10	103	28	37	106	5	35	20	108	92	12	124	44	131

Trio

	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
1	72	6	59	25	81	41	89	13	36	5	46	79	30	95	19	66
2	56	82	42	74	14	7	26	71	76	20	64	84	8	35	47	88
3	75	39	54	1	65	43	15	80	9	34	93	48	69	58	90	21
4	40	73	16	68	29	55	2	61	22	67	49	77	57	87	33	10
5	83	3	28	53	37	17	44	70	63	85	32	96	12	23	50	91
6	18	45	62	38	4	27	52	94	11	92	24	86	51	60	78	31

上面兩個表總共含有 $176 + 96 = 272$ 個小節，可以製造出 $11^{16} \times 6^{16} \approx 1.3 \times 10^{29}$ 個不同的樂曲，這個數相當大，即使有人每天玩這個遊戲好幾次，終其一生所產生的樂曲也不大可能會重複。頗神奇的一點是，不論這些小節如何組合，所產生的樂曲大致上聽來都有模有樣（就像是較「平庸」的作曲家所作的曲子一樣）；莫札特或許也想藉此諷刺一般作品的無趣吧？

身處電腦時代的我們已經不必靠擲骰子來玩這個遊戲了，透過程式我們不難請電腦亂數來代勞，甚至已有「善心人士」將寫好的程式放在網路上供大家使用，莫札特所作的 272 個小節的音樂也已經被轉換成 MIDI 檔，可透過網路自由下載；我們今天只消按幾下滑鼠就能輕鬆地嘗試莫札特當初所規畫的遊戲，播放 MIDI 檔時甚至還能選擇以各式各樣的樂器來演奏，便利的程度恐怕連天才如莫札特也難以想像。

以下是兩個相關的網站：[Mozart's Musikalisches Würfelspiel](#) 及 [Ruttkay's Page](#)；如果您對古典音樂有興趣而還沒拜訪過這兩個網站的話請務必試試，相當有意思。