

方格紙上的圓

許介彥

大葉大學電機工程學系

chsu@mail.dyu.edu.tw

我們在中學都學過畢氏定理，知道長度為 3、4、5 的三條線段可圍成一個直角三角形，因為這三數滿足 $5^2 = 3^2 + 4^2$ 。畢氏之後還有許多數學家曾經研究過什麼樣的整數可表為兩個整數的平方和，例如 25 顯然可以，而 3 或 6 則否。如果不限制 x 和 y 須為正整數（只要是整數即可），那麼將 25 表為 $x^2 + y^2$ 的方法總共有 12 種，分別是 $(x, y) = (5, 0), (0, 5), (-5, 0), (0, -5), (3, 4), (-3, 4), (3, -4), (-3, -4), (4, 3), (-4, 3), (4, -3), (-4, -3)$ 。

數學上通常把總共有多少種方法可將整數 n 表為兩個整數的平方和記作 $r(n)$ ，因此 $r(25) = 12$ ， $r(3) = 0$ 。 $r(n)$ 其實是一個相當不規則的函數，它的值隨著 n 的變化而時大時小，例如當 n 除以 4 的餘數是 3 時， $r(n)$ 的值一定是 0（這相當容易證明），因此有無窮多個 n 可使得 $r(n)$ 的值為 0；另一方面，也有某些 n 會使得 $r(n)$ 的值很大。事實上， $r(n)$ 的值是沒有上限的，對任意正整數 k ，我們都不難找到某個 n 使得 $r(n) > k$ 。

既然 $r(n)$ 的起伏這樣劇烈，我們似乎很難期待 $r(n)$ 的變化會依循著什麼規律；令人訝異的是，從長遠來看， $r(n)$ 的「平均值」竟會隨著 n 的增大而趨穩定。這裡的平均值指的是 $r(0)$ ， $r(1), r(2), \dots, r(n-1)$ 等 n 個數的算術平均：

$$\frac{r(0) + r(1) + r(2) + \dots + r(n-1)}{n}$$

為了表示上的方便，我們將上式的分子記作 $R(n)$ 。本文接下來將說明，當 n 趨於無窮大，上式的極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R(n)}{n}$$

不僅存在，而且將趨近一個我們很熟悉的常數——圓周率 π 。

讓我們用幾何的觀點重新來看這個問題。如果我們把前述滿足 $x^2 + y^2 = 25$ 的 12 組 (x, y) 看成是坐標平面上的 12 個點，那麼這 12 個點與原點的距離都是 5，因此它們都位於以原點為圓心且半徑是 5 的圓上，而該圓上總共也只有這 12 個點是「格子點」（即 x 坐標與 y 坐標皆為整數的點）。如果我們把以原點為圓心且半徑為 $\sqrt{n}$ 的圓記作 $C(\sqrt{n})$ ，那麼對任意正整數 n ， $r(n)$ 的值就等於位於圓 $C(\sqrt{n})$ 上的格子點的個數，因此 $R(n)$ 的值就等於位於同心圓 $C(0)$ ， $C(\sqrt{1})$ ， $C(\sqrt{2})$ ， $\dots$ ， $C(\sqrt{n-1})$ 上的格子點的總數，而這其實也就等於位於圓 $C(\sqrt{n})$ 內部的格子點的總數，因為圓 $C(\sqrt{n})$ 內的任何一個格子點與原點的距離都介於 0 到 $\sqrt{n-1}$ 之間，因此一定會被上述 n 個同心圓中的正好一個圓通過。

既然求 $R(n)$ 的值相當於求圓 $C(\sqrt{n})$ 內總共有幾個格子點，如果我們將坐標平面上的每個

格子點看成是某個單位方格的左上角頂點，那麼求 $R(n)$ 的值也相當於求「左上角頂點落在圓 $C(\sqrt{n})$ 內的單位方格總共有幾格？」又由於每個單位方格的面積是 1，因此又相當於求「左上角頂點落在圓 $C(\sqrt{n})$ 內的單位方格的總面積是多少？」例如圖 1 的紅色區域即顯示了左上角頂點位於圓 $C(10)$ 內的所有單位方格，而這些小方格的總面積就等於 $R(100)$ 。

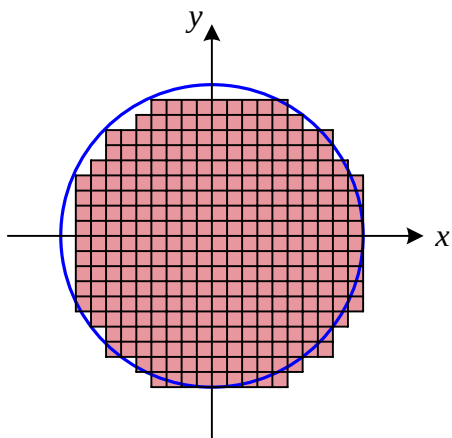


圖 1

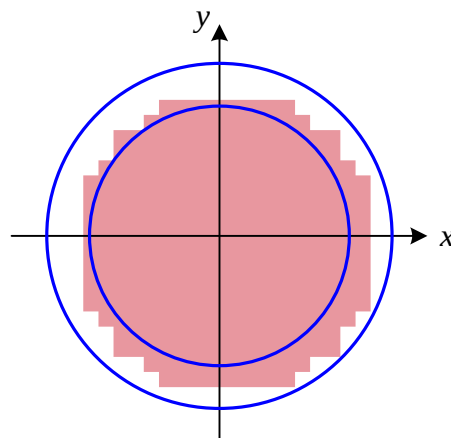


圖 2

由圖 1 我們不難「猜」出當 n 趨於無窮大時， $R(n)$ 的值大約是多少，因為圖中的紅色小方格大致上填滿了圓的內部，這很像是小學生為了求圓面積而將圓畫在方格紙上，然後用圓內的格子的總面積來做為圓面積近似值的情形；因此我們可以粗略地估計，當 n 趨於無窮大， $R(n)$ 的值應該會接近圓 $C(\sqrt{n})$ 的面積大小，也就是 $\pi(\sqrt{n})^2 = \pi n$ ；我們前面所希望求得的平均值的極限因此為 $\lim_{n \rightarrow \infty} (R(n)/n) = \pi$ ——果然是它。

除了用猜的，能不能用較嚴謹的方法來導出相同的結果呢？其實也不難。回頭看看圖 1，由於每個單位方格的對角線長為 $\sqrt{2}$ ，因此紅色區域完整地涵蓋了圓 $C(10 - \sqrt{2})$ ，而整個紅色區域又全部位於圓 $C(10 + \sqrt{2})$ 的內部（見圖 2）；從面積的角度來說，紅色區域的面積一定比裡面的圓大而比外面的圓小。一般而言，

$$C(\sqrt{n} - \sqrt{2}) \text{ 的面積} \leq R(n) \leq C(\sqrt{n} + \sqrt{2}) \text{ 的面積}$$

也就是

$$\pi(\sqrt{n} - \sqrt{2})^2 \leq R(n) \leq \pi(\sqrt{n} + \sqrt{2})^2$$

展開得

$$\pi(n - 2\sqrt{2n} + 2) \leq R(n) \leq \pi(n + 2\sqrt{2n} + 2)$$

每一項同除以 n 得

$$\frac{\pi(n - 2\sqrt{2n} + 2)}{n} \leq \frac{R(n)}{n} \leq \frac{\pi(n + 2\sqrt{2n} + 2)}{n}$$

當 n 趨於無窮大，上式的左右兩邊將同時趨近 π ，因此中間的 $R(n)/n$ 也將趨近 π 。

原本是一道看起來頗困難的算術問題，沒想到當我們改用幾何的眼光看它時竟然頓時變簡單了，很奇妙吧？

本文探討的問題在述語上通常稱為 Gauss's Circle Problem。