最好的時機

許介彥
大葉大學電信工程學系
chsu@mail.dyu.edu.tw

某個歌唱比賽總共有 100 人參賽，參賽者於賽前利用抽籤決定了出場的次序。已知這次比賽將從這 100 位參賽者中選出一位第一名（其他 99 人全都得不到任何名次），而且由於某些原因，每位參賽者在上臺唱完後將旋即離去，因此評審人員必須在每位參賽者一唱完就立刻決定要不要將第一名獎牌頒給他（也就是說，獎牌只能頒給某個剛唱完的人，不能頒給前面唱過的人）。如果你是這次比賽唯一的評審，面對這樣奇怪的規定，你會怎麼做？當你在比賽過程中看到某位參賽者唱得很好，你顯然將面臨兩難的抉擇：如果將獎牌頒給他，有可能後面其實還有唱得更好的人尚未登場，而不頒給他的話又怕他正是該得獎的人。到底該怎麼做才可以讓這 100 人中唱得最合你意的人真的獲得第一名的機率最大呢？

由於參賽者不少，因此即使第一位出場的參賽者唱得再好，你大概都不會立刻決定將第一名頒給他；對最先登場的幾位參賽者你大概都會「先看看再說」，用他們的表現做為衡量後面的參賽者表現好壞的依據。當你看過的參賽者已經累積到一個地步後（50 人恰當嗎？該更多或更少？），你才會開始認真考慮此後登場的每位參賽者該不該獲獎。

你所面臨的問題其實可以用下面這個較純粹的數學問題來描述：A 和 B 兩人利用 100 張卡片玩一個遊戲，首先由 A 秘密地在每張卡片上寫上一個數，100 個數全不同，而且數的大小沒有任何範圍限制；接著 A 將這 100 張卡片充分洗牌後一張一張翻給 B 看，每當 B 看到一張卡片上的數時他必須決定「選」或「不選」，整個翻卡片的過程中 B 只能「選」一張卡片，而如果 B 不選某張卡片的話該卡片會立刻被 A 撕碎，因此 B 沒有反悔的機會。B 的目標是希望能「一擊中的」，選中這 100 張卡片中數字最大的卡片。請問：B 應該怎麼做才有最大的機會選中該卡片？

由於數字最大的卡片可能是這 100 張卡片中的任何一張，因此即便 B 在遊戲過程中閉著眼睛隨便選擇其中一張（例如第 17 張），他選中最大數的機率都還有 $1/100$。我們的目標當然是為他找到一個選中最大數的機率比 $1/100$ 大（而且越大越好）的方法。

延續我們前面的想法，如果 B 對前 50 個數「只看不選」，所選擇的數是從第 51 個數開始往後所見的第一個比前 50 個數的最大數還大的數，這樣的做法好不好呢？這個做法當然不一定能選中最大的數，例如最大數如果是前 50 個數之一的話就一定不會被選到，又如第 51 個數如果比前 50 個數都還大的話一定會被選到，但是它未必是全部 100 個數中的最大數等。不過這個做法在某些情況下確實能選中最大數，例如當全部 100 個數中的最大數是後 50 個數之一，而且第二大數是前 50 個數之一時（為什麼？），這種情形發生的機率為

$$(1/2)(50/99) \approx 0.2525$$

（最大數是後 50 個數之一的機率為$1/2$，而第二大數是剩下的 99 個數中的前 50 個數之一的機率為$50/99$）；除了上述情形外還有其他情況用這個做法也能選中最大數（你能舉個例子嗎？），因此這個做法選中最大數的機率已經超過$1/4$，遠比前面提到的$1/100$還大。

考慮一個更具一般性的做法：前$(r-1)$個數只看不選（假設$r \geq 2$），所選的數是從第r個數開始往後所見的第一個比前$(r-1)$個數的最大數還大的數。這個做法選中最大數的機率是多少呢？如果最大數是第 k 個數（$r \leq k \leq 100$），那麼只有當它前面的$(k-1)$個數中的最大數是位於最前面的$(r-1)$個數之一時此法才會選中第 k 個數，這種情況發生的機率為$(r-1)/(k-1)$，而由於最大數是第k個數的機率為$1/100$，因此最大數是第k個數而且會被此法選中的機率為

$$\frac{1}{100}\cdot\frac{r-1}{k-1}$$

k 可能的值最小為 r，最大為 100，因此這個做法會選中最大數的機率為

$$P(r)=\sum_{k=r}^{100}\left(\frac{1}{100}\cdot\frac{r-1}{k-1}\right)=\frac{r-1}{100}\sum_{k=r}^{100}\frac{1}{k-1}$$

一般而言，當總共有 n 張卡片時（前面的討論中 n 為 100），

$$P(r)=\frac{r-1}{n}\sum_{k=r}^{n}\frac{1}{k-1}\qquad (r \geq 2)$$

我們的目標是求出當 r 等於多少時 $P(r)$ 會有最大值。

如果我們以$\Delta P(r)=P(r+1)-P(r)$表示 r 向後移一個位置時 $P(r)$ 的增量，那麼

$$\begin{aligned}\Delta P(r) &= \frac{r}{n}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r+1}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)-\frac{r-1}{n}\left(\frac{1}{r-1}+\frac{1}{r}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)\\ &=\frac{1}{n}\left(-1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r+1}+\frac{1}{r+2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)\end{aligned}$$

我們發現$\Delta P(r)$的值會隨著 r 的增加而減小（當 r 越大，上式等號右邊的括號裡相加的項數越少），而且由於$\Delta P(2)>0$（假設$n>4$）且$\Delta P(n-1)<0$，因此 $P(r)$ 的值隨著 r 的增加先是越來越大然後越來越小；我們所求的r當然就是第一個會使得$\Delta P(r)<0$的r（數學上可証明$\Delta P(r)$的值不可能等於 0，因此最好的 r 只有一個），也就是第一個會使得

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{r+1}+\cdots+\frac{1}{n-1}<1$$

的 r；對任意一個大於 4 的正整數 n，由上式已足以求出最好的 r 是多少。

當$n=100$時，利用電腦程式不難求得最好的 r 為 38，因此 B 應該對最前面的 37 個數只看不選，他應選擇從第 38 個數之後所見的第一個比前 37 個數的最大數還大的數，這樣一來他選中 100 個數中的最大數的機率將大約是 0.371，比前面提到的 1/4 又大了不少。下表是筆者利用程式求出來的幾個不同的 n 值所對應的最好的 r 值：

n	10	100	1000	10000	100000
最好的 r 值	4	38	369	3680	36789

讀者也許已由上表觀察到隨著 n 的增大，r 與 n 的比值「似乎」越來越趨近某個數（大約是 0.368），以下我們將說明的確是如此；因此對較大的 n 而言，我們即使沒有電腦都很容易預測最好的 r 值大約是多少。

考慮當 n 趨於無窮大的情形。數學上可証明此時調和數列的前 n 項的和 H_n 與 $\ln(n)$ 的值相當接近（兩者之差趨近尤拉常數 $g \approx 0.5772$），即

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \approx \ln(n)$$

所以當 n 很大時（此時最好的 r 也會很大），

$$P(r) = \frac{r-1}{n}\left(H_{n-1} - H_{r-2}\right) \approx \frac{r-1}{n} \ln\left(\frac{n-1}{r-2}\right) \approx \frac{r}{n} \ln\left(\frac{n}{r}\right)$$

而且由於當 r 為最好的值時 $\Delta P(r) \approx 0$，即

$$\frac{1}{r} + \cdots + \frac{1}{n-1} \approx 1$$

因此 $\ln(n/r) \approx 1$，可知 $r \approx n/e \approx 0.368n$，此時選中最大數的機率為

$$P(r) \approx \frac{r}{n} \approx \frac{1}{e} \approx 0.368$$

因此對較大的 n 而言，如果 B 對最前面的 n/e 個數只看不選而選擇之後所見的第一個比前面所有的數還大的數，那麼他選中這 n 個數中的最大數的機率約為 $1/e$。數學常數 e 在這個地方意外地現身了。

讀者也許要問：除了這種對前面某些數只看不選而選擇之後所見的第一個比前面所有的數還大的數的做法外，是不是有可能有其他做法選中最大數的機率會更大呢？答案是否定的，不過証明稍複雜，我們在此略過。

日常生活中，我們在許多場合有可能面臨與本文探討的問題類似的情況；在這些情況中，我們希望能從一堆東西中選擇一個「最好」的（東西的總數事先知道或大略估計得到），不過所有這些東西並不是同時出現在我們面前供我們選擇，而是一個一個陸續晃過我們眼前，選擇的機會稍縱即逝；面對這種情況我們最好自己事先在心底有個盤算，「該出手時就出手」，否則很容易錯失良機，後悔莫及。

舉個例子。假設某人在環遊世界的旅程中想為自己買一件較貴重的物品做為紀念，由於經費及時間的限制，他只能買一件，而且走過的旅途不再回頭，這樣一來他就面臨了看到每件合意的物品時必須決定選或不選的情況。又如青年男女的相親活動，在雙方見過面之後常須告知對方是否有交往的意願，一旦拒絕了對方往往就沒有回心轉意的機會。又譬如某家公司想要徵求一名秘書，公司主管在面試一個一個的應徵者時，可能需要當場讓每位應徵者知道自己是否將被錄用，而公司一旦做出決定後就不能反悔；因為情境的契合，本文所探討的問題在述語上正是常被稱做「秘書問題」（Secretary Problem）。