週期信號的魔術師
（傳立葉級數淺談）

林容杉
國立暨南國際大學電機系
jslin@olympus.ncnu.edu.tw

在我們的日常生活中，常常會利用到各式各樣不同種類的信號，來傳遞許多我們所需要的資料與訊息，譬如說最常接觸到的有線電話、電視與電腦網路，或者是無線手機、廣播與衛星通訊等，在在都是俯手可及的例子。通常為了瞭解信號間的差異性，我們會把信號約略粗分為週期性（periodic）和非週期性（aperiodic）兩大類。不論是在數學裏介紹到週期函數，或者是在通訊中提及到週期信號，就不能不談到傳立葉級數（Fourier series）在其中所扮演的重要角色。

在介紹傳立葉級數之前，讓我們先來看看什麼是週期信號。簡單的說，假如某個信號在重覆的每一個固定時段內，它的信號形式也會跟著重覆出現，那麼這個信號就叫做週期信號，而這個固定時段就稱為是此信號的週期（period）。如果是用數學式子來表示，對於所有的時間 t 而言，週期信號 $x(t)$ 就必須符合以下的關係式：

- $x(t) = x(t+T)$ ，此處的 T 是指信號的週期（ $T > 0$ ）。

舉個例子來說，我們常見的三角函數信號 $\sin t$（正弦函數）和 $\cos t$（餘弦函數），就皆是為週期 $T = 2\pi$ 的週期信號。

十九世紀的法國數學家傳立葉（Jean Baptiste Joseph Fourier）在研究熱傳導及擴散（heat propagation & diffusion）的物理現象時，發現在物體上的溫度分佈能夠以簡諧相關的正弦波級數（series of harmonically related sinusoids）來有效表示。由於這項發現，他歸納出一個十分重要的結論：**任何週期信號都可以被表示成以適當數量的不同頻率及振幅的正弦與餘弦函數信號的相加組合**，而這也就是所謂的傳立葉級數定理。這個定理不僅可以解答有關振盪（vibration）和熱擴散的物理

現象，許多在科學及工程上與正弦函數信號相關問題的研究，也因為這個定理而得到相當大的助益，例如描述行星的運動、地球氣候週期性的變化與交流電源所產生的電壓或電流等。

可是傅立葉級數定理的正式發表並十分不順利，因為當時的另一位數學大師拉格朗日（Joseph Louis Lagrange）並不贊同這樣的觀點。拉格朗日認為三角函數級數（trigonometric series）只是可以用來表示某些部份的週期信號，可是並非適用於任意的週期信號，尤其他堅信在波形上帶有轉角的信號（例如方波信號）是根本不可能用三角函數級數來表示，於是傅立葉的論文在當時是被拒絕而無法發表的。一直要到西元 1822 年，傅立葉級數定理才在“The Analytical Theory of Heat”這本書中正式出現，這距離傅立葉第一次發表他對於週期信號的論點已相距了 15 年，可見得真金是不怕火鍊的。

以下我們就來討論一個週期性的方波信號（圖一），看看傅立葉級數可以變出什麼魔術，來完來這個拉格朗日認為不可能的任務。傅立葉級數告訴我們任意的週期信號 $x(t)$ 可以用以下的數學式子來表示：

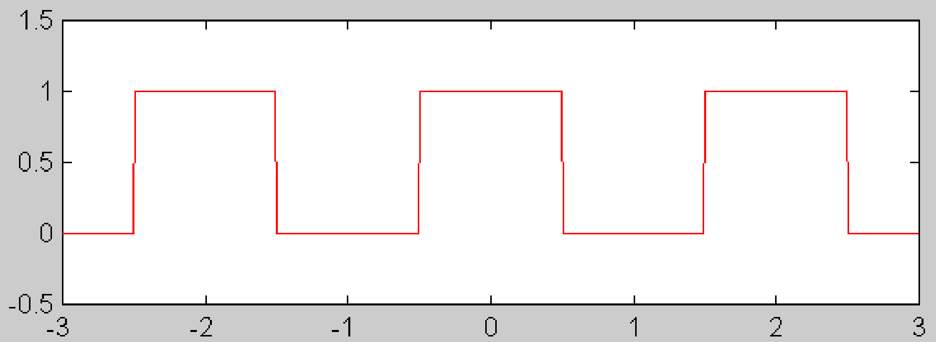
$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=0}^{N} A_k \cos k(\tfrac{2\pi}{T})t + \sum_{n=1}^{N} B_n \sin n(\tfrac{2\pi}{T})t \\ &= A_0 + A_1\cos(\tfrac{2\pi}{T})t + B_1\sin(\tfrac{2\pi}{T})t + A_2\cos 2(\tfrac{2\pi}{T})t + B_2\sin 2(\tfrac{2\pi}{T})t + \cdots\cdots \end{aligned}$$

$$A_k = \frac{2}{T}\int_T x(t)\cos k(\tfrac{2\pi}{T})t\,dt, \quad B_n = \frac{2}{T}\int_T x(t)\sin n(\tfrac{2\pi}{T})t\,dt$$

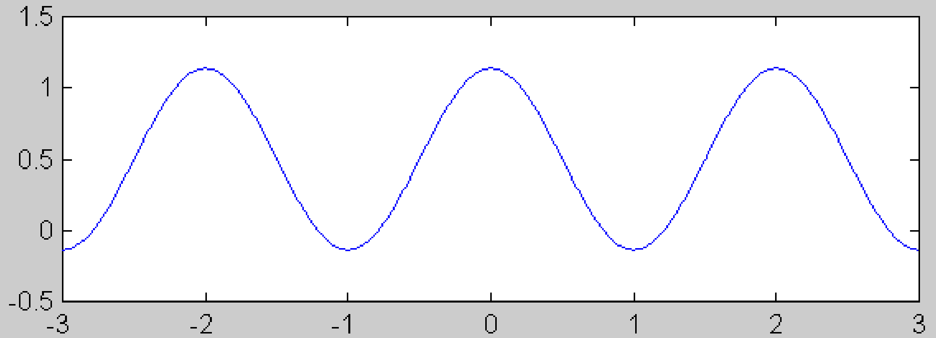
其中 A_k 和 B_n 被稱為傅立葉係數（Fourier coefficient），也就是相關的餘弦與正弦函數信號的振幅，而非負的整數 N 是看需要選多少個弦波信號來做相加，當然 N 可能是一個非常大的數，這要看各個週期信號的實際需要。（圖二）所展現的是以傅立葉級數合成方波信號的過程，其中傅立葉級數的合成波形會隨著 N 的增加而最終與（圖一）的方波信號變成一致，看來這位週期信號的魔術師的確真是有兩把刷子。

談到這裏，可能會有人立即聯想到那麼非週期信號怎麼辦呢？這就得要靠傅立葉級數的孿生兄弟傅立葉轉換（Fourier transform）來幫忙了，此時將必須涉及到分別在時域（time domain）及頻域（frequency domain）來表達同一個信號的概念。傅立葉轉換可說是傅立葉的另一偉大貢獻，以後若有機會，再跟大家介紹。

（附註：此信號圖形由暨南大學電機系二年級學生吳俊輝所提供。）



(圖一) 方波信號



(圖二) 傅立葉級數合成的方波信號

參考資料：

[1] Oppenheim, A. V., Willsky, A. S. and Nawab, S. H. (1997). ***Signals & Systems***, 2nd ed. (International ed.) Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall Inc.

[2] Kamen, E. W. and Heck, B. S. (1997). ***Fundamentals of Signals and Systems Using MATLAB***. (International ed.) Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall Inc.

[3] http://forum.swarthmore.edu/key/nucalc/fourier.html

[4] http://www.spd.eee.strath.ac.uk/~interact/fourier/fseries.html