

淺談狹義相對論

蔣亨進

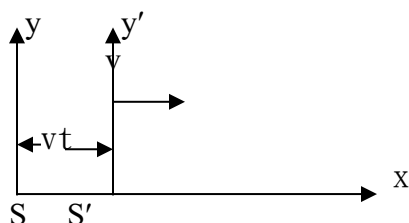
國立清華大學物理系

hcchiang@phys.nthu.edu.tw

相對論的一些結論與我們日常生活的經驗及直覺往往不相符合，因此給人一種神秘難懂的感覺，其實相對論是建立在非常嚴密的邏輯基礎上，它也是物理學的發展中最美的篇章之一，本文擬以教淺顯的方式嘗試著說明狹義相對論的意義及其所產生的影響。

絕對時間與伽利略時空轉換

若有兩個坐標系 S 及 S' , S' 沿著它們共同的 x 軸方向以 v 的速度對 S 相對運動 (如下圖所示)



則空間一點的坐標及時間在 S 及 S' 兩坐標系中有何轉換關係呢? 伽利略 (Galileo Galilei) 依據絕對時間的觀念寫下下列的時空轉換式, 即

$$x' = x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$

上式中 x, y, z 代表空間坐標, t 則表時間。

這組時空轉換式與我們的直覺相符，經數百年而未被懷疑。我們很容易由這組時空轉換式看出：一個質點的加速度在 S 及 S' 坐標系中是相同的，因此牛頓 (I. Newton) 的三個運動定律在 S 及 S' 坐標系中其形式是相同的，這個性質稱為牛頓的力學定律遵守相對論原理 (principle of relativity)

馬克斯威方程式所引發的問題

電磁學的發展在古典物理中發展得較遲，但是到了十九世紀下半，也已大致完備。1864 年馬克斯威 (J.C. Maxwell) 對古典電磁理論做了總結，他把前人所發現的電磁學定律用一組微分方程式表現，最重要的是他修正了安培 (A.M. Ampere) 定律，將此修正後的安培定律與法拉第 (M. Faraday) 定律聯立，推導出了電磁波的波動方程式。人類對電磁波的了解以及應用都是從這裏開始。著名物理學家費曼 (R.P. Feynman) 曾說過，他認為十九世紀中影響人類生活最深遠的一件事，就是馬克斯威在安培定律上加了一項修正項。我們現在不難體會他這段話的意思，想想看，若是人類不知電磁波為何物，我們那能打開電視看 NBA 球賽，那能談上網呢？

然而，馬克斯威方程式也引發了一些問題：

第一，在馬克斯威方程式所推導出來的電磁波波動方程式中，會出現一個重要的參數

，那就是電磁波的波速，這個波速是對那一個坐標而言呢？

第二，在伽利略時空轉換下，馬克斯威方程式不遵守相對論原理。

對於第一個問題，當時的物理學家是用以太學說來解釋，也就是說宇宙中充滿一種叫做以太的物質，他是電磁波傳遞的介質，電磁波的波速是對以太的速度。1887年邁克遜(A.A.Michelson)與莫雷(E.W.Morley)做了一個著名的實驗，他們將一光源發出的光分成兩束，一束平行於地球運動的方向，另一束垂直於地球運動的方向，利用兩束光線的干涉，測量地球對以太的速度，意外的是，量不出地球對以太的速度，邁克遜—莫雷實驗結果的另一種解釋是光在順著地球運動方向跟垂直於地球運動方向其速度是一樣的，這似乎意味著光的速度與光源的速度無關。當然，在邁克遜—莫雷實驗前，也有許多實驗，想要証實以太的存在，並測量其性質，然而這些實驗的結果，充滿了矛盾，在當時沒有任何實驗能証實以太的存在，邁克遜—莫雷的實驗結果在當時也沒有合理的解釋。

對於第二個問題，當時有一些物理學家認為，也許是因為馬克斯威方程式尚需要修正他們嘗試修正馬克斯威方程式使它們在伽利略時空轉換下遵守相對論原理。但是這一條路被證明是走不通的，因為加上了一些修正項後就預測了一些新的電磁現象，然而這些電磁現象從未能被實驗証實。當然，我們還有一個選擇，那就是對電磁學定律放棄相對論原理，也就是說電磁學定律無須遵守相對論原理。

卜因卡瑞及洛仁茲的貢獻

卜因卡瑞(J.H.Poincare)深入的探討了相對論原理的問題，他指出，如果力學定律與電磁學定律不同時遵守相對論原理，則在整個物理理論的架構中會產生很大的問題，因為要嚴格的劃分力學問題與電磁學問題是很困難的，也就是說有些問題的分析需同時用到力學及電磁學定律，如果電磁學定律不遵守相對論原理，對於這類問題在不同的坐標系中分析，就可能獲得完全不同的結論。

其實我們往往接受相對論原理而不自覺。舉例言之，飛機駕駛艙中的儀表差不多都是依據電磁學定律所設計的，我們在地面上設計並測試這些儀表後，將之裝到飛機上，飛機飛上了天，高速飛行，我們有什麼理由相信這些儀表仍是按著我們所設計的指示呢？若是在飛機飛行時，固定其上坐標與地面坐標中，電磁定律的形式不同，則儀表的運作會不相同。飛機飛上了天，儀表亂指一通，我們不是要很糟糕嗎？但我們不擔心這點，而且事實上也並沒有發生這種情況，因此，我們是有理由相信電磁學定律是遵守相對論原理的。

洛仁茲(H. A. Lorentz)則從另一個方向來看這問題，他問一個問題：如果馬克斯威方程式要遵守相對論原理，則時空轉換式應是甚麼樣子呢？結果他推導出了所謂洛任茲時空轉換式(Lorentz Transformation)

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{xv}{c^2}\right)$$

$$\text{上式中 } \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \text{ } c \text{ 為光速}$$

然而，這個時空轉換式與伽利略時空轉換式不同，洛任茲自己也無法賦予它正確的物理意義，因此他將之當作一個純數學的命題。

愛因斯坦的時空觀念及兩個假設

在前面數節，我們大概的敘述了狹義相對論尚未被發現前的歷史背景。對於這樣紛擾擾的狀況，提出完滿解釋的不是當時的任何一位大物理學家，而是年僅 26，藉藉

無名的瑞士專利局職員，他的名字叫愛因斯坦（A.Einstein）。

愛因斯坦深入的思考時間及空間的意義，在前人工作的啟發下，能夠看出洛仁茲時空轉換才是正確的時空轉換，而伽利略時空轉換只是在 $v \ll c$ 時洛仁茲時空轉換的極限情形。

愛因斯坦對於時間及空間堅持所謂「操作型定義」，也就是說對於時間及空間不能以一段話來說明或定義，而是以一可操作的測量來定義。例如牛頓對於時間是定義為「一種均勻的流動，它不因觀察者的位置或運動狀況的改變而有所不同。」這就是一種絕對時間的觀念，然而愛因斯坦認為這樣定義的時間是不夠精確的，不同的人也會有不同的闡釋，他認為要定義時間時應該說明如何量測時間，由這個方向去思考他發現時間是相對的。

愛因斯坦在建立狹義相對論時是以下列兩個基本假設為出發點：

(a) 真空中的光速 c 是個常數，它與光源的速度無關。

(b) 所有物理定律都遵守相對論原理。

由前面幾節所述的歷史背景來看，愛因斯坦會由這兩個假設出發，多少是受到了前人工作的啟發。在以下的數節中，我們要介紹愛因斯坦如何自這兩個假設及他的時空觀念解釋了洛仁茲時空轉換的物理意義。

時空測量的關連性及「同時」的相對性

假定我們要測量一根木棒的長度，我們要怎麼做呢？我們可以拿一根尺將木棒的頭對正尺上零刻度畫一線，再於棒尾對正處也畫一線，則可由尺上零刻度至木棒尾所畫線之間距離的讀數，定義此木棒的長度。這是大家都能同意地一種測量方式，假定這樣測量出木棒的長度是 1 公尺。如今若木棒在順著尺的方向運動我們如何量其長度呢？若是我們先將木棒頭經過尺的零刻度時在尺上畫一線，再回頭在棒尾處在尺上畫一線，所對之刻度要看我們動作之快慢了，若是在兩次畫線之間木棒前進了 0.2 公尺，則我們所量得的結果是 0.8 公尺，當然大家都可以看出這樣的量測方法是大有問題的，我們應當「同時」對正木棒的頭及尾在尺上畫線，姑不論這樣量出的長度是否 1 公尺，只要大家接受這是一種正確的測量長度方法，那麼空間的量度與時間的量度就關連在一起了，因為長度的測量是空間量測的一種，然而「同時」是時間的觀念，由以上的例子可看出時間與空間的量測是有其關連性的，因此它們的定義也耦合在一起。

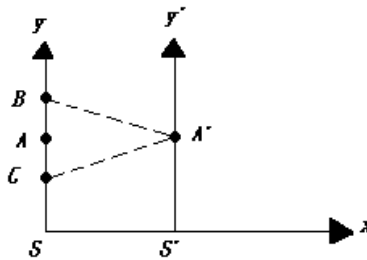
那麼什麼又是「同時」？愛因斯坦指出「同時」這個觀念具有相對性，也就是說兩個事件對某一觀察者是同時發生，但對另一觀察者並不一定是同時發生，這樣一來，時間就失去了絕對性。以下我們舉一例子說明此點。假設有一列很長的火車停靠在月台邊火車上有 B' 、 C' 二人對準了手錶，在同一時間， B' 在車頭， C' 在車尾，各放出一個光訊號，在火車之中點處觀察者 A' 將同時收到此二光訊號，因為自車頭及車尾的光走了相同的距離，光速恆為一定，所以 A' 會推論 B' 、 C' 是同時放出此二光訊號的，另一觀察者 A 站在月台上與 A' 同位置，他也會推論 B' 、 C' 二人同時放出光訊號。然而要是火車是以 v 的速度前進，則在 A' 收到光訊號時，火車已走了一段距離，換言之，由火車頭來的光訊號先被 A' 收到，由車尾來的光訊號後收到，但對 A' 來說，他認為由車頭尾來的光仍是走了同樣的距離，所費時間應該一樣，既然他先收到車頭來的光訊號，那一定是位於車頭的 B' 先發出光訊號了。然而，對於站在月台上的 A 而言則仍是同時收到車子頭、尾所發出的光訊號，因此，他仍是推論 B' 、 C' 同時發出光訊號。由以上的例子，我們可以看到，同樣的兩個事件，由於 A 及 A' 有相對速度，以致 A 、 A' 對於此兩事件是否同時發生，有不同的測量結果，「同時」是一個相對的觀念。

四個辯證

(a) 垂直於相對運動方向，長度之比較

考慮下圖中 y 軸上發生之二事件，設圖中 A、B、C 三人等距離，在 S 坐標系中之 A 觀察者觀察由 B、C 二人在同一時間發出的光訊號，因 A、B、C 等距離，因此 A 同時收到此二人光訊號，因此，此二事件對 A 來說是同時發生。在 S' 坐標系中的 A' 於有什麼樣的結論呢？由圖上可以看出 B 或 C 所發出的光訊號走了相同的距離到達 A' 所處位置，所費時間相同，因此 A' 也會推論 B 與 C 是同時發出光訊息。因此，在 y 軸上發生二件事，對 A 若為同時，則對 A' 亦為同時。今設在 S 坐標中沿 y 軸方向有一木棒長度為 L，在 S' 坐標中之觀察者可在 S、S' 坐標系相交會時在棒之頭尾同時畫下刻度，量出一長度 L' 此一長度是在 S 及 S' 坐標系中觀察者都同意的，因為都是同時在棒之頭尾畫下刻度，要不產生矛盾，L' 必須等於 L。

因此，垂直於 S、S' 坐標系相對運動方向的長度對 S 及 S' 坐標系中的觀察者而言是相等的。



(b) 相對運動坐標中，時間間隔的比較

如下圖(b)，在 S' 坐標系中之 A' 發出一光訊號，經平面鏡反射再收到，設 A' 與平面鏡之距離為 ℓ' ，則由 A' 發出光訊號到他收到反射回來的光訊號，共經過多少時間呢？

對 A' 而言，光來回共走了 $2\ell'$ 的距離，所以經過的時間 $\Delta t' = \frac{2\ell'}{c}$ 。然而

在 S 坐標系中的 A 所看到的情況如下圖(a)中所示，光是走在一斜線，經平面鏡反

射才被 A' 收到，所經過的時間滿足下列方程式 $\left[\left(\frac{v\Delta t}{2} \right)^2 + \ell^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{c\Delta t}{2}$

$$\Delta t = \frac{2\ell}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \frac{2\ell}{c}$$

將上式中的 Δt 解出得

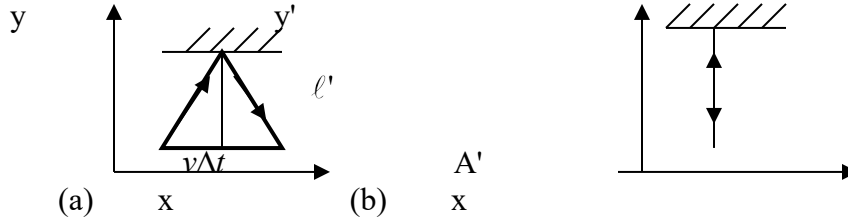
(1) 由辯證(a)我們知道 $\ell = \ell'$ ，所以 $\Delta t'$ 與 Δt 之比為 $\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{2\ell'}{c} \frac{c}{2\ell} \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\gamma}$ 或

$$\Delta t = \gamma \Delta t' \dots \dots \dots (1)$$

(1) 式的物理意義是：在 S' 坐標系中，同一地點發生兩事件的時間間隔 $\Delta t'$ 在 S 坐標系中的觀察者認為是相隔 $\gamma \Delta t'$ 發生，因為 $\Delta t > \Delta t'$ 所以此一結果也常常被稱為時間膨脹。要注意的是，因為物理定律都要遵守相對論原理，所以我們只知道 S' 對 S 有相對運動，無從判斷那一個坐標靜止，那一個在動。時間膨脹的結果在 S 及 S' 的角色互換仍是成立的，也就是說，如果在 S 坐標系中有兩件事在同一地點發生，在 S' 坐標系中的觀察者所看到的是 S 坐標係以 v 的速度向 $-x$ 方向運動，此時

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{(-v)^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \Delta t$$

因此，時間仍是膨脹了同樣的幅度。



(c) 平行於相對運動方向長度之比較

我們再來看在辯證(b)中S坐標系中之觀察者認為A'沿著x方向在 Δt 的時間方向走了 $v\Delta t$ 的距離，也就是說，我們可以想像在S座標系中放了一個x方向的長尺，在A'放出光訊號時，一S系中觀察者在A'位置畫一線，當A'收到反射回來光訊號時多一固定在S坐標中的觀察者又在尺上劃一線，則兩線之間的距離L為 $v\Delta t$ 。這樣一段距離由S'坐標系中之A'觀點推論是多長呢？A'會認為S坐標系-v的速度向-x方向倒退，S坐標中兩觀察者畫線的時間間隔為 $\Delta t'$ ，所以兩線間的距離是 $L' = |-v\Delta t'| = v\Delta t'$ ，由以上的討論可以得到 $\frac{L'}{L} = \frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{1}{\gamma}$ 或 $L' = \frac{1}{\gamma} L$ ----- (2)

(2)式的物理意義是：在S坐標系中認為x方向的一段線段(對S坐標相對靜止)，若其長度為L，則在S'坐標系中觀察者認為此一線段長度為 $\frac{1}{\gamma} L$ 。因為 $L' < L$ ，此一結果

也稱為長度縮減。值得提出的是依相對論原理，當S、S'兩坐標系角色互換時，此一結果仍然成立。也就是說在S'坐標中靜止的一段線段，在S坐標中去觀察時長度也是

縮減的，縮減的幅度是 $\sqrt{1 - \left(\frac{-v}{c}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ ，所以縮減的幅度也是一樣的。

(d) 二事件x位置不同，在S'坐標系中時間間隔的修正

設有二事件在S'坐標系中是同地發生，在S坐標系中是相距 Δx 發生，則二事件在S及S'坐標系中的時間間隔有何關係呢？我們可以取辯證(b)中的例子來討論，在S'坐標系中A'發出光及接收光訊號是在同一個坐標x'，所以 $\Delta x' = 0$ ，然而在S坐標系中所看到的是兩件事相差 Δx 距離， $\Delta x = v\Delta t$ 。由辯證(b)我們知道 $\Delta t' = \frac{1}{\gamma} \Delta t$ 所以

$$\Delta t' = \gamma \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \Delta t \text{ 又因 } \Delta x = v\Delta t \text{ 故上式可寫為 } \Delta t' = \gamma \left[\Delta t - \frac{\Delta x v}{c^2}\right] \text{----- (3)}$$

$$(3) \text{ 式建議 S' 及 S 坐標之間的時空轉換式為 } t' = \gamma \left(t - \frac{xv}{c^2}\right) \text{----- (4)}$$

也就是說，在(4)式中令 $t' = t_2'$ 、 $t = t_2$ 、 $x = x_2$ 減去令 $t' = t_1'$ 、 $t = t_1$ 、 $x = x_1$ 就得到(3)式。

由以上的四個辯證，我們很容易得到洛仁茲時空轉換式。如果我們將S及S'坐標系的角色互換，則因S坐標示以-v的速度對S'運動，因此(4)式的反轉換式為

$$t = \gamma \left[t' + \frac{x'v}{c^2} \right] \text{----- (5)}$$

聯立 (4) 及 (5) 式，消去 t' ，得 $x' = \gamma(x - vt)$ ----- (6)

又從辯證 (a) 我們知道應該有 $y'=y \quad z'=z$ ----- (7)

(6) 式 (7) 式及 (4) 式即是我們在前面所寫下的洛仁茲時空轉換式。

結語

狹義相對論深入的改革了時空的觀念，它能夠說明洛仁茲時空轉換才是正確的，伽利略時空轉換是洛仁茲轉換在 $v \ll c$ 時的極限情形。馬克斯威方程式是遵守相對論原理的。由於時空的觀念是如此的基本，因此相對論誕生後，物理起了根本的改革，力學中的重要物理量：質量、動量、能量都需加以修正，速度相加的法則也要修正，在新的速度相加法則下，光速果然是與光源的速度無關，而是一個常數，邁克遜－莫雷的實驗結果可以有完滿的解釋，我們也不需要以太的觀念了。相對論對於物理乃至於整個科學都產生了巨大的衝擊及深遠的影響，它是近代物理的重要基石之一。