BigSmall

我們每個人一生中大概總至少有一次對『無限』這個觀念起過一些遐思，到底宇宙是不是無限大？人能夠長生不老該有多好？

到底無限是什麼？這種問題一般人隨便想想沒有答案也就算了，但是希臘哲學家在2500年前就對這個問題做了十分認真的探討。

嚴格說起來，無限其實有兩種：無限大和無限小。照理說無限大應該是比較會引起人的想像力的，但是對無限大的探討一直到19世紀下半（距今僅僅百餘年）才有人有些具體的研究，足足比無限小的研究晚了至少2400年。

西元前450年時，希臘人Zeno就對無限小提出了許多的論點，他的著作已經失傳了，但是他提出來4個詭論(paradox)被柏拉圖引用，（他書裡共提出40個關於無限小的詭論，其他的36個大概都太複雜了，所以沒有通過時間的考驗。）其中一個比較容易解釋的是『不可移動』論：假設路人甲要從A走到B，一定要經過中點C，但從A到C的話又得先經過中點D，照此類推可知要從A出發的話，必須先經過無限多個中點。但是既然時間是有限的，路人甲永遠無法走到第一個中心點（也就是那個距離他無限近的那個中心點），所以路人甲永遠也不能移動。這個論證從經驗法則來看當然是有問題的，但是十分難反駁。Zeno的論證從現代的觀念來看還是很有趣的，尤其他將『無限逼近』的觀念反過來用：不從1開始逼近無限，而從無限開始回溯到1，這種論證角度是很獨特的。尤其很難想像2500年前的人居然這麼有抽象的概念。Zeno的『無限逼近』或『無限小』的觀念到了亞理斯多德發揮了正面的用途，從測量土地到微積分，仍至後來抽象的數學分析（mathematical analysis），無限逼近的觀念無所不在。

對『無限大』的探討是數學史裡極為精彩的一頁。這方面一個基本問題是給兩個無限大的集合，那一個比較大？這個問題比較難用直觀來看。以常理而言，一個無限大的集合已經是大得不得了了，哪有什麼誰大誰小之分？但是如果考慮自然數N與正偶數E這兩個集合，兩個都是無限大，但E是N的子集合，所以顯然還是可以問誰大誰小的問題。

在1874年康托爾（Cantor）第一個開始對這方面做有系統的研究。在康托爾之前，無限大就是無限大，是不能也不用比較的。康托爾建議兩個集合A與B大小的關係如下：我們用|A|代表A的〝基數〞（cardinal number）：如果存在一個從B到A的1對1函數的話，那麼|A|≧|B|。這種函數的存在表示每一個B中的元素，都有一個A中的元素與其對應，而且對B中不同元素，A中對應的元素也不同。顯而易見，如此的話A中的元素數目至少和B一樣多。所以A與B有同樣的〝基數〞（意思就是大小相同）如果|A|≧|B|且|B|≧|A|。我們回到N與E的例子，N與E大小是一樣的，因為假如我們定義f(x)=2x，這個f就是一個N到E的1對1函數，所以|E|≧|N|。反過來說，既然E是N的子集合，顯然N中之元素個數至少和E中一樣多，所以 |N|＝|E|。用同樣方法，康托爾可以證明出來所有分數 (rational numbers) 的個數也和 N 一樣多。在這裡順便偏離主題一下。我們一般將 rational number 和 irrational number 翻譯成「有理數」與「無理數」，其實他們真正的意義是「可分數」(可以寫成 p/q 形式的數) 與「不可分數」。有理無理是對人類行為的判斷，和數字應沒有什麼關係。

既然這些集合都是一樣大，那到底有沒有什麼集合的基數是大於N的？康托爾在 1874 年的文章中證明實數 (R) 的個數 (基數) 遠大於N。這個結果表示說其實無限大中還是有等級之分的。康托爾的證明雖然在他的另一篇 1891 年的文章中被簡化了，但是還是需要一些數學知識，在此略過不提，基本上來他說是用一個對角關係的證明方法，這個證明方法到現在還是普遍被採用。

如果實數的基數比自然數大，那麼有沒有哪一個無限集合的基數比實數更大，或者說有沒有一個「最大」的無限集合？有了康托爾的對角線證明方法後這個問題是很容易回答的。

給一個集合A，A的密集（power set）是所有A的子集合的集合。譬如說如果A＝{1,2}, 則A的密集是P(A)= {Φ,{1},{2},{1,2}}。用對角線證明法可以證出不論A是什麼，A的密集的基數永遠大於A的基數（|P(A)|＞|A|）。所以不會有一個最大的集合。

康托爾認為N是基數最小的無限集，叫它N_0。把他『大一號』的無限集的基數叫N_1，如此類推。那麼是哪個集合的基數是N_1？一個假設是認為N的密集的基數就是N_1 ($|P(N)|= N_1$)。這叫做『連續統假設』（Continuum Hypothesis），把它稍微衍生一下就可以得到『廣義連續統假設』(Generalized Continuum Hypothesis)：

若$|A|=N_K$，則$|P(A)|= N_{K+1}$。連續統假設是對是錯，沒有人知道，但Gödel在1930年代證明出來說它的正確與否無法在現有的集合論架構下被證明。

康托爾的理論在當時引起了很大的爭議，有人從神學的角度來看說無限就已經是無限了，哪有大小之分？如果真的無限還分大小，而且沒有最大的無限大的話，那上帝要放在哪裡？許多數學家也反對康托爾的理論，最反對的人是另一個偉大的數學家Kronecker。Kronecker認為數學的研究應限於有限時空內可以創造出來的物件，所以討論任何大於N_0的東西是沒有意義的。其實Kronecker的論點也不是完全沒有道理，現在電腦能夠處理的東西不就是限於這個範疇之內嗎？但是因為Kronecker在當時極有影響力，所以它的反對讓康托爾吃到不少苦頭，有點學派干涉學術的味道。

康托爾的理論將集合論(Set Theory)憑空創造出來，對數學的貢獻極大，但集合論本身也有許許多多的問題，譬如說到了現在仍然沒有一個可被證明有一致性（consistent）的公設系統，而且有許多詭論。現代數學以集合論為基礎其實是蠻危險的。但是康托爾對無限的探討將人類思維提升到一個新的境界，光以這一點而言就足躋身於大思想家之列了。