

傅葉爾轉換(Fourier Transform)

李家同

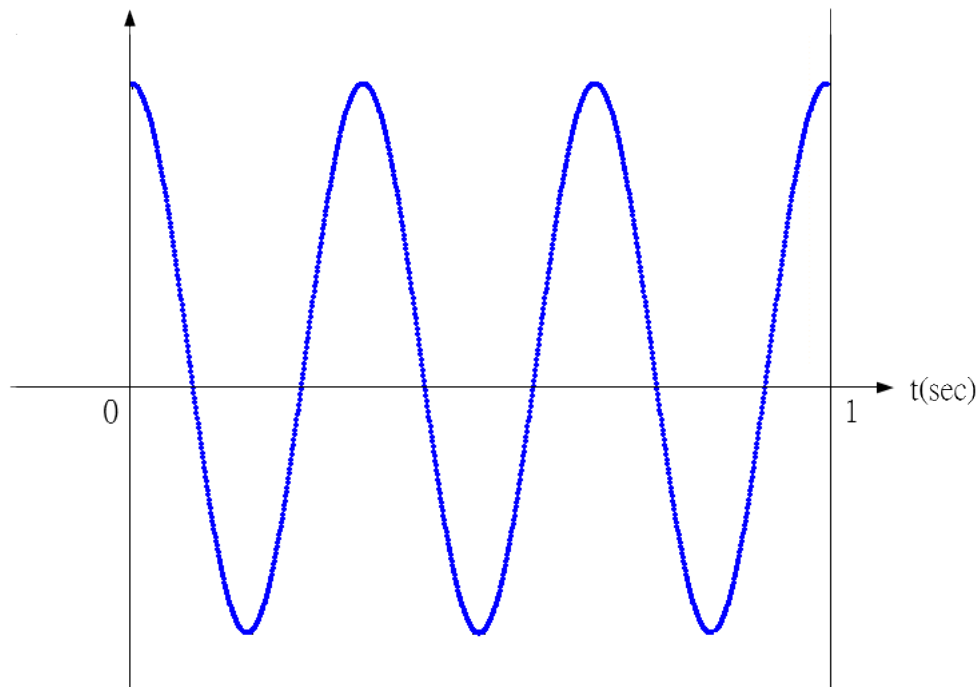
暨南國際大學資訊工程系

rctlee@ncnu.edu.tw

在通訊理論中，傅葉爾轉換(Fourier Transform)扮演了極重要的角色，我們幾乎可以說沒有傅葉爾轉換，就不可能有我們現在的通訊。

傅葉爾轉換究竟是什麼？如果我們用非常正式的數學方式來解釋它，大家就看不懂了，因此我在這裡設法用非正式的方式來解釋。

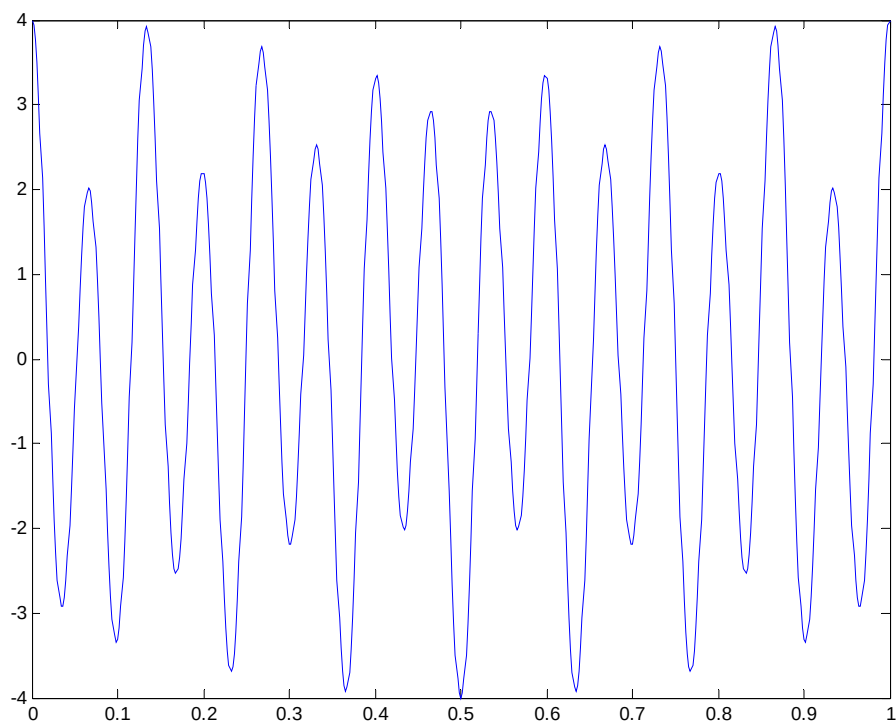
首先，請看圖一，圖一所表示的是一個 cosine 函數，各位可以看出來，在



圖一. 頻率為 3 的 cosine 函數

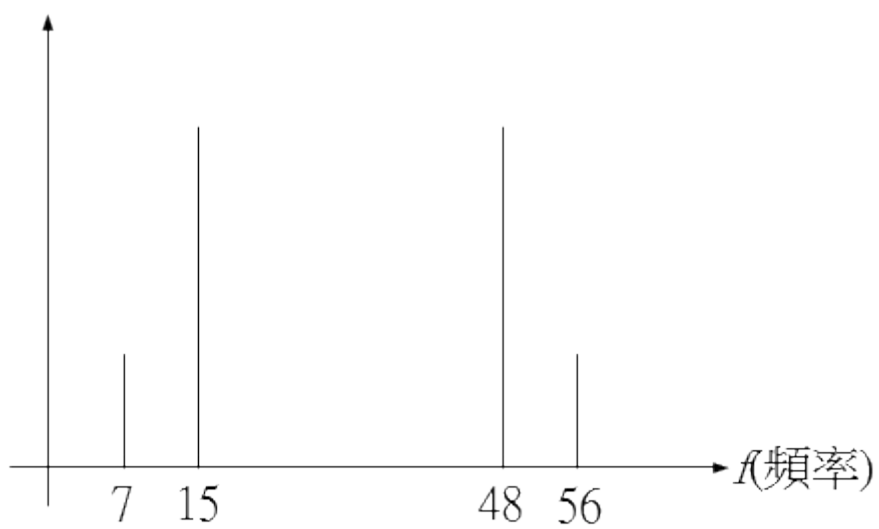
一秒內，這個函數變換了 3 次，所以我們說這是一個頻率為 3 的 cosine 函數。

請各位再看圖二，這個訊號既不是 cosine，也不是 sine，它究竟是什麼呢？



圖二. 一個訊號

如果我們用傅葉爾轉換來分析這個訊號，你就可以得到圖三。



圖三. 上圖訊號的傅葉爾轉換頻譜

圖三什麼意義呢? 我們可以發現圖三是左右對稱的, 而圖三所給的資訊只要看左邊的部份就可以。在左邊, 我們可以看到兩個尖端, 一個在頻率 $f=7$ 的地方, 一個在頻率 $f=15$ 的地方, 換句話說, 圖二的這個訊號其實是兩個訊號的和:

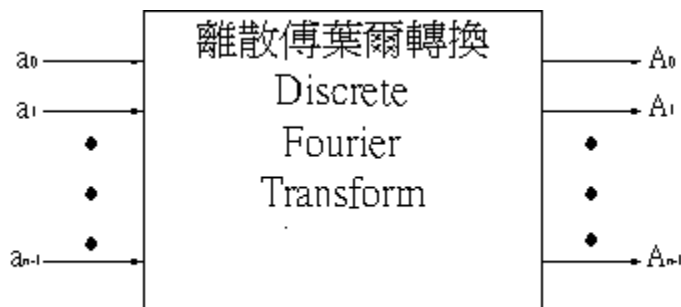
$$f(t) = \cos(2\pi(7)t) + 3\cos(2\pi(15)t)$$

大概說起來, 傅葉爾轉換的理論是說, 任何一個訊號, 都是一大堆 cosine 函數的和。為了避免太抽象的數字理論, 我在這篇文章介紹的是離散傅葉爾轉換 (Discrete Fourier Transform)。

假設我們的訊號是 $f(t)$, 我們在一秒鐘內, 對 $f(t)$ 取樣 n 次, 我們就可以得到 $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, 其中

$$\begin{aligned} a_0 &= f(0) \\ a_1 &= f(1) \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= f(n-1) \end{aligned}$$

我們再將 $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ 送進離散傅葉爾轉換, 如圖四所示:



圖四. 離散傅葉爾轉換

$A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ 代表什麼呢? 以下的式子就說明一切:

$$f(t) = A_0 + A_{n/2} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n/2-1} |A_i| \cos\left(\frac{2\pi i t}{n} + \sigma_i\right) \quad \text{for } t = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (1)$$

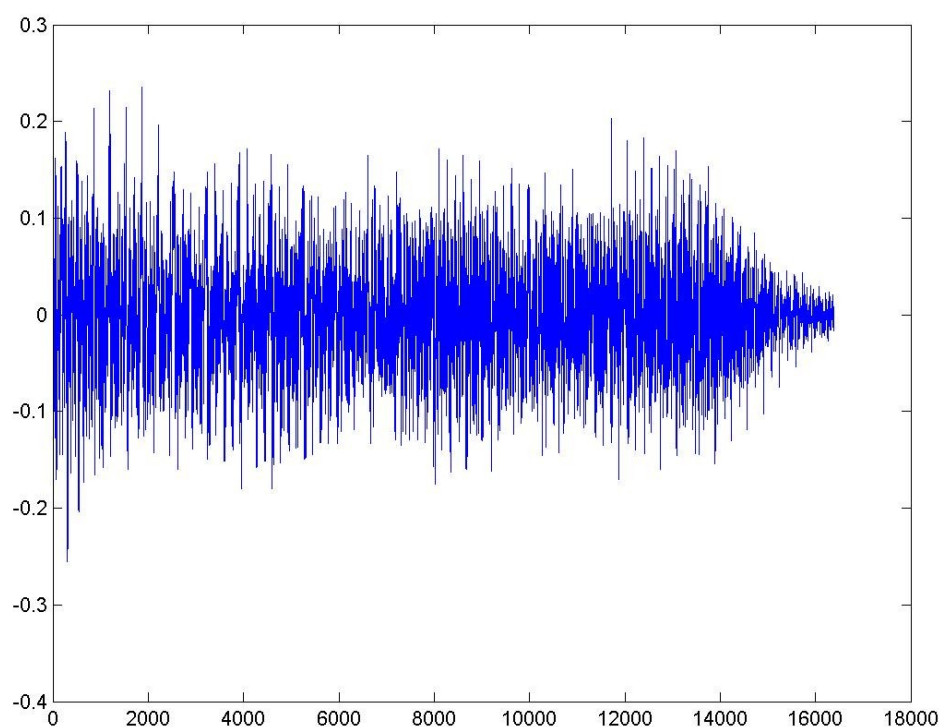
A_i 很可能是一個複數, 如 $2+3j$, $|A_i|$ 是一個變數, 如果 $A_i = a + jb$, $|A_i| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 。

式(1)中的 i 代表頻率, 式(1)表示 $f(t)$ 由 $n/2$ 個 cosine 函數所組成, 這些函數

的頻率為 i , $i = 0, 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1$, 每一個函數的大小是 $|A_i|$, $|A_i|$ 大, 代表這個頻率為 i 的 cosine 函數份量很大, $|A_i|$ 小, 表這個頻率為 i 的 cosine 函數微不足道。

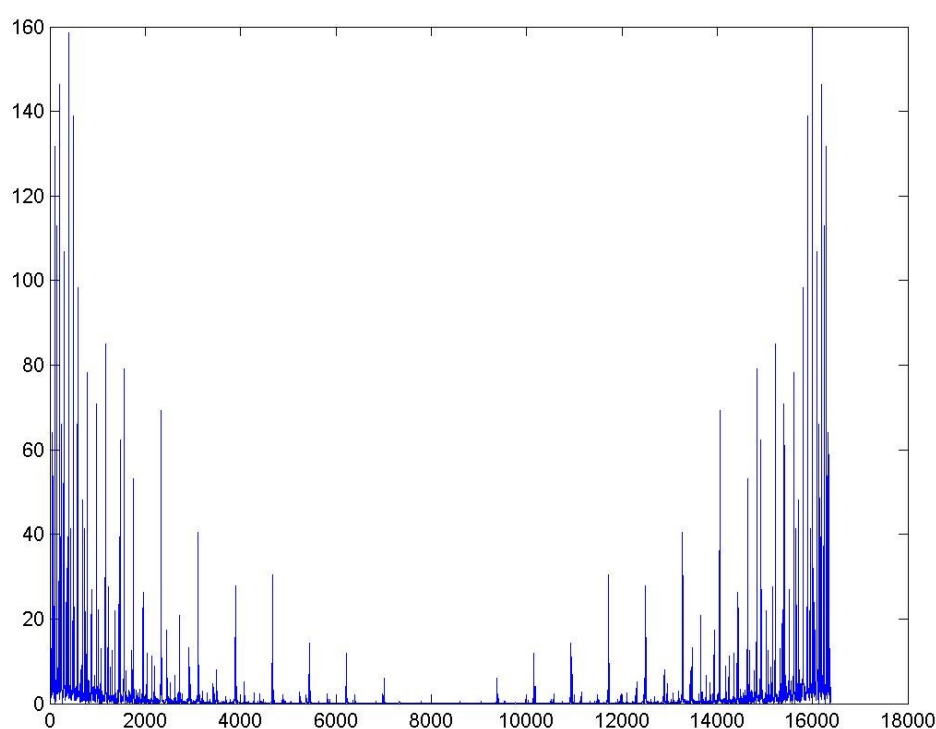
因此, 我們可以說, 傅葉爾轉換, 是一種分析的工具, 我們可以利用傅葉爾轉換來看任何一個訊號內究竟有什麼樣的訊號。

現在請看圖五,



圖五 一秒鐘的音樂訊號

圖五的訊號是一秒鐘的音樂訊號, 對於我們來說, 這當然是一頭霧水, 不知道這個訊號葫蘆裡賣什麼藥, 圖六是圖五訊號的離散傅葉爾轉換頻譜。



圖六 一秒鐘的音樂訊號的離散傅葉爾轉換頻譜

讀者可以看到真正重要的頻率集中在 3000Hertz 之前，我們幾乎可以說，3000Hertz 以後的訊號是不太重要的。我也要強調離散傅葉爾轉換有一個對稱性，各位讀者只需要看 8192hertz 以前的頻率就能夠了，大於 8192Hertz 的頻率一概是多餘的。

我們並不能說公式(1)是對所有的 t 都是對的，只能說對於 $t = 0, 1, 2, \dots, n-1$ 是有效的，如果將 $t = 1.75$ 代入公式(1)就不一定對了。

如果我們的 n 取樣非常大，我們幾乎可以說公式(1)對於相當多的 t 值，都是對的。

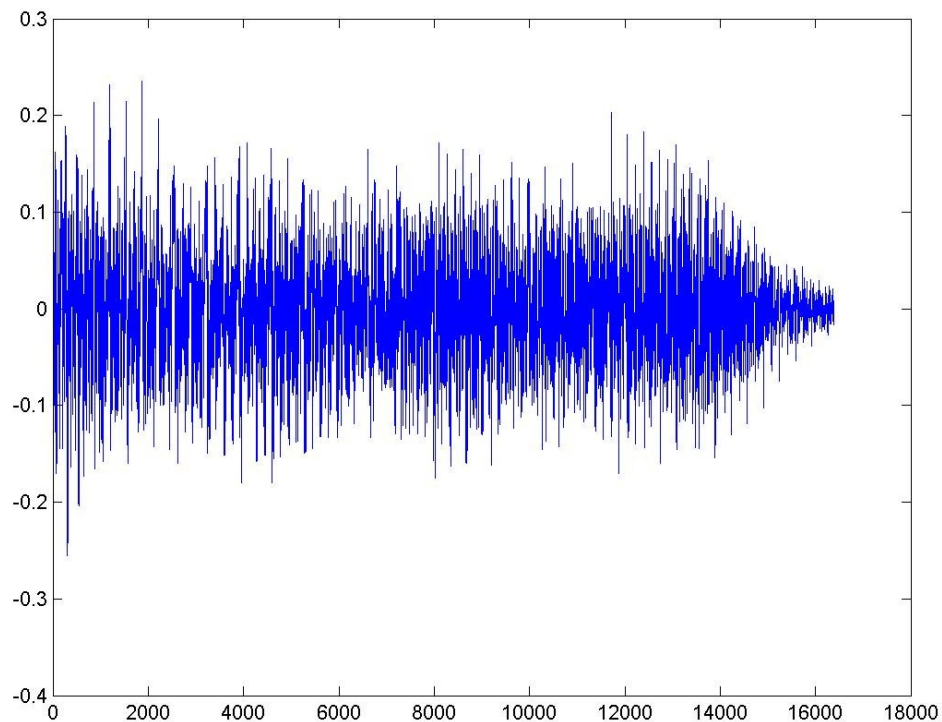
傅葉爾轉換的一個特色是所謂的反轉傅葉爾轉換(Inverse Fourier Transform)，離散傅葉爾轉換也有反轉離散傅葉爾轉換(Inverse Discrete Fourier Transform)。圖七顯示反轉離散傅葉爾轉換的功能，



圖七. 反轉離散傅葉爾轉換

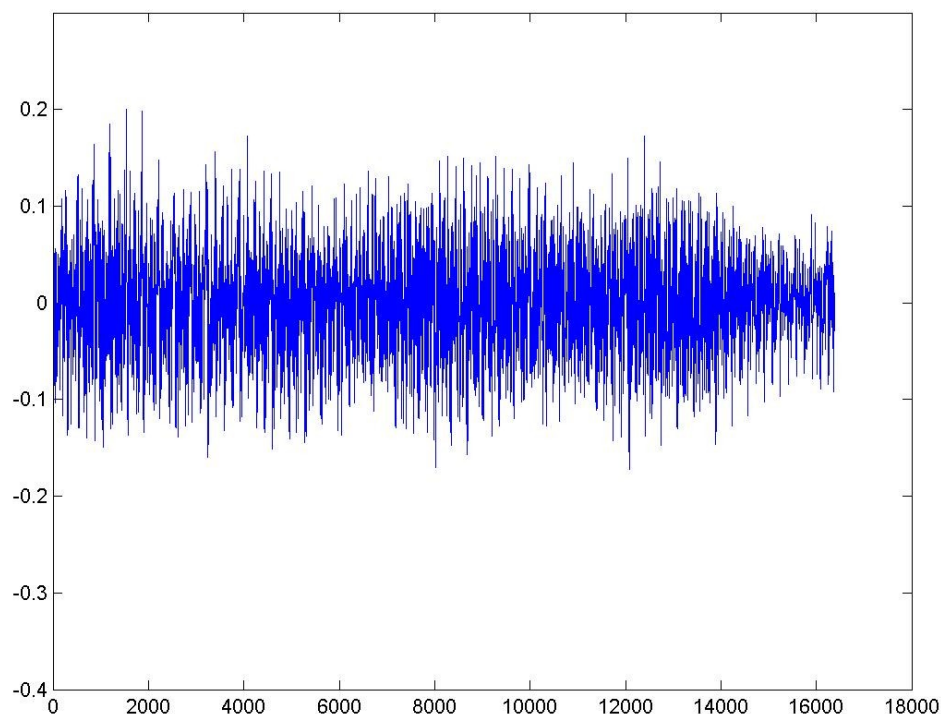
從數學的觀點來看，反轉離散傅葉爾轉換幾乎完全像離散傅葉爾轉換。離散傅葉爾轉換將一個與時間的訊號 $f(t)$ 轉換到頻率的領域，讓我們知道這個訊號各個頻率的訊號有多強。反轉傅葉爾轉換則將各個頻率的大小轉換成原來的訊號。

圖八就是圖六的反轉，也就是說，當我們將圖六的頻率輸入到反轉離散傅葉爾轉換，我們就會得到原來的訊號。如果我們只顧到圖六中訊號強的頻率，情形如何呢？



圖八. 反轉離散傅葉爾轉換的結果

圖九就是一個例子，我們將圖六中大小小於 10 的頻率去掉，再利用反轉離散傅葉爾轉換，就可以得到圖九，讀者可以看出圖九幾乎和圖五一模一樣。



圖九. 去掉小於 10 的反轉離散傅葉爾轉換的結果

現在我們再考慮一個問題，經由傅葉爾轉換以後，我們可以知道我們人聲音的頻率大概低於 3000Hertz，我們又知道一個訊號的波長 λ 可用以下的公式求得：

$$\lambda = \frac{v}{f} \quad (2)$$

公式(2)中的 v 是光速，等於 3×10^8 m/sec， f 就是頻率，以 $f = 3000$ Hertz 為例，

$$\lambda = \frac{3 \times 10^8}{3 \times 10^3} = 10^5 = 100 \text{ km}$$

如果要直接廣播人的聲音，天線的長度需要 $\frac{\lambda}{2} = 50 \text{ km}$ 之長，這是不可能的。我們必須提高訊號的頻率，如何做呢？一個最簡單的是將訊號乘入 $\cos(2\pi f_c t)$ ，其中 f_c 是一個較高的頻率，這就是所謂的調幅，令 $m(t)$ 代表原來的訊號，調頻以後

的訊號變成了

$$s(t) = m(t) \cos(2\pi f_c t) \quad (3)$$

一旦調幅以後，所有原來頻率為 f 的訊號，現在都變成了兩種訊號，一個頻率是 $f_c + f$ ，另一個頻率是 $f_c - f$ 。因為 f_c 很高，所以 $s(t)$ 中各個訊號都提高到了 f_c 的程度，這種訊號就可以很容易輸送出去了。

為什麼頻率為 f 的訊號現在變成了 $f_c + f$ 和 $f_c - f$ ？這是很容易解釋的，傅葉爾轉換告訴我們，任何一個訊號都是由一大堆 cosine 訊號所組成的。假設有一個訊號的頻率是 f ，這個訊號就是 $\cos(2\pi f t)$ 。經過調幅以後，這個訊號變成了

$$\cos(2\pi f t) \cos(2\pi f_c t)$$

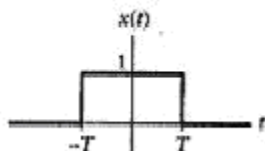
但是以上的式子又可以用以下的式子來表示

$$\begin{aligned} & \cos(2\pi f t) \cos(2\pi f_c t) \\ &= \frac{1}{2} (\cos(2\pi (f_c + f)t) + \cos(2\pi (f_c - f)t)) \end{aligned}$$

所以我們看出原來的頻率由 f 變成了 $f_c + f$ 和 $f_c - f$ 。

現在我要再談一個有關寬頻傳輸線的問題，通常我們說一條很高級的傳輸線為寬頻傳輸線，其實我們傳輸是一連串的脈波，我們所謂好的傳輸線，應該是在一秒鐘內傳輸大量的脈波，所以我們應該是 **high bit rate** 的傳輸線，為什麼我們又說這是寬頻呢？難道 **high bit rate** 就代表頻寬很寬嗎？

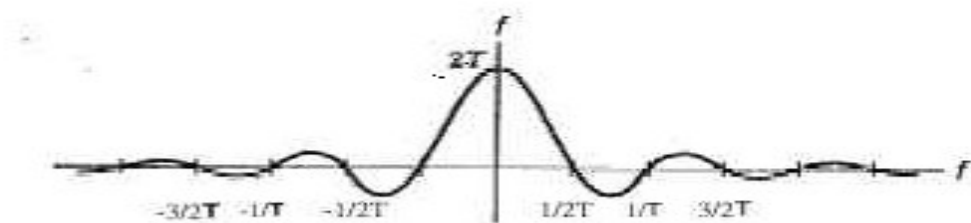
這個問題可以用傅葉爾轉換來求得解答。請看圖十，圖十表示的是一個脈波，經由傅葉爾轉換，我們可以看出這個脈波各種頻率的分佈，



圖十 一個脈波

圖十一就是經由傅葉爾轉換所產生的頻率分佈圖，我們通常可以說 $x(f)$ 第

一次



圖十一 脈波經由傅葉爾轉換所產生的頻率分佈圖

碰到 f 軸的那一點代表頻寬，如圖十一所示，第一次 $x(f)$ 碰到 f 軸的 f 值是 $1/2T$ ， T 越小，這個值就越大。

如果一條傳輸線可以在一秒鐘內傳輸很多的脈波，每個脈波的寬度就會越小，而這個脈波所含有的頻率就越多，所以這種高速的傳輸線都是寬頻傳輸線。

希望讀者現在對於傅葉爾轉換有一點觀念了。