

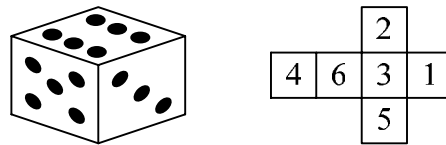
先發不制人

許介彥

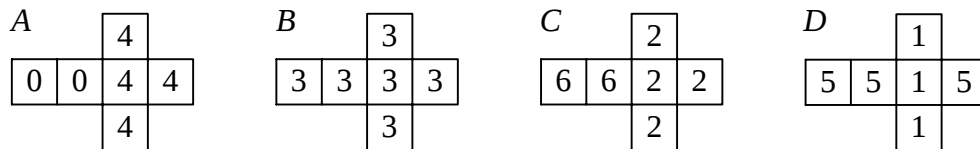
大葉大學電信工程學系

chs@dyu.edu.tw

您擲過骰子嗎？每顆骰子都有六面，點數由 1 至 6（見下圖）；投擲一顆骰子的「結果」指的是當骰子靜止後朝上的一面的點數。對一顆正常的骰子而言，投擲的結果六面中的任何一面朝上的機率都是 $1/6$ 。



下圖顯示了四顆較奇特的骰子各面上的點數。如果我現在想利用這四顆骰子跟你玩一個遊戲，賭注是 100 塊錢，遊戲規則是由你先選擇其中一顆骰子，然後我也選擇一顆骰子，接著我們分別投擲自己所選擇的骰子，由所得點數較大的人獲勝；你應該跟我玩這個遊戲嗎？



如果被選中的兩顆骰子是 A 和 B，由於 B 擲出的點數一定是 3，而 A 擲出 4 的機率是 $2/3$ ，因此選擇 A 的人獲勝的機率為 $2/3$ 。

如果被選中的兩顆骰子是 B 和 C 呢？此時 C 擲出 2（比 B 的 3 小）的機率是 $2/3$ ，因此選擇 B 的人獲勝的機率為 $2/3$ 。

如果被選中的兩顆骰子是 C 和 D，由於 C 的點數比 D 大的情形一定是發生於：(1) C 擲出 6，或(2) C 擲出 2 且 D 擲出 1 時，而

$$C \text{ 擲出 6 的機率} = \frac{1}{3}$$

$$C \text{ 擲出 2 且 } D \text{ 擲出 1 的機率} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

因此 C 贏 D 的機率為 $(1/3) + (1/3) = 2/3$ 。

目前為止我們已經知道 A 贏 B 的機率、B 贏 C 的機率、C 贏 D 的機率全都等於 $2/3$ 。如果我現在請你不透過計算，先猜猜看當被選中的兩顆骰子為 D 與 A 時，D 贏 A 的機率是大還是小，你也許會直覺地認為勝算很小（應該只剩下 $(1/3)^3$ 吧？）；事實卻不是如此。由於 D 贏 A 的情形發生於：(1) D 擲出 5，或(2) D 擲出 1 且 A 擲出 0 時，而

$$D \text{ 擲出 5 的機率} = \frac{1}{2}$$

$$D \text{ 擲出 } 1 \text{ 且 } A \text{ 擲出 } 0 \text{ 的機率} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

因此 D 贏 A 的機率為 $(1/2) + (1/6) = 2/3$ ；選擇 D 的人反過來又有較大的勝算可以贏 A 。

所以如果你剛才答應跟我玩這個遊戲，那麼不論你一開始所選擇的是哪一顆骰子，我都有辦法可以選擇另一顆骰子使得我贏你的機率是你贏我的機率的兩倍。

許多數學關係滿足所謂的「遞移性」（transitivity），例如數字間的大小關係：當 X, Y, Z 為三個實數，我們由 X 等於 Y 且 Y 等於 Z 可推知 X 等於 Z ，由 X 大於 Y 且 Y 大於 Z 可推知 X 大於 Z 等；不過上述骰子間的輸贏機率顯然並不具遞移性。

除了上面介紹的問題外，古典機率中還存在著許多「違反直覺」的問題；這些問題不僅有趣而且有用——每天為世界各地的賭場賺進了大把的鈔票。

下次有人邀你玩遊戲，而且「大方地」讓你先作出選擇或先走第一步時，你可要小心了。