

全新的開始

許介彥

大葉大學電信工程學系

chsu@mail.dyu.edu.tw

舊曆年剛過，一元復始，萬象更新；新的一年裡您想必有許多計畫等著要付諸行動吧？除了新計畫外，您是否也有一些過去沒做成功的工作想回頭重新再試試看呢？不管過去曾經失敗過幾次，只要持續嘗試，許多事情終究能達成；這種「忘掉過去，重新開始」的態度不僅對做事情很有幫助，對許多數學問題而言，這樣的想法本身更是一項解題的利器。

先看個跟擲骰子有關的例子。每顆骰子有六面，點數由 1 至 6。如果骰子被投擲後每一面出現的機率都是 $1/6$ ，您知道平均而言要將一顆骰子擲幾次才能擲出一個 5 嗎？

運氣好的話當然擲一次就夠了，不過這種情形發生的機率只有 $1/6$ 。也有可能需擲兩次，發生的機率為 $(5/6)(1/6)$ （第一次擲出的點數不是 5，第二次才是 5）；也有可能需擲三次，發生的機率為 $(5/6)^2(1/6)$ 等。如果我們令 $p = 1/6$ ， $q = 1 - p = 5/6$ ，那麼對任意正整數 k ，需擲骰子 k 次才能擲出點數 5 的機率都等於 $q^{k-1}p$ ，因此我們所求的平均投擲次數（即所需投擲次數的「期望值」）為

$$1(p) + 2(qp) + 3(q^2p) + 4(q^3p) + \cdots$$

上式是一個收斂的級數；如果我們令上式的值為 E ，由於

$$\begin{aligned} E &= p(1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \cdots) \\ qE &= p(q + 2q^2 + 3q^3 + \cdots) \end{aligned}$$

兩式相減得

$$(1 - q)E = p(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots) = p(1 - q)^{-1} = p \cdot p^{-1} = 1$$

因此 $E = (1 - q)^{-1} = p^{-1} = 6$ ；這與我們的直覺是相符的，因為投擲一顆骰子一次得點數 5 的機率為 $1/6$ ，所以平均而言需擲六次才會出現點數 5。

上面的做法雖不複雜，不過這個問題其實還有更簡單的解法。由於第一次投擲的結果是 5 的機率為 p ，不是 5 的機率為 q ，而如果第一次不是 5 的話，第一次的投擲對我們要擲出 5 的目標來說算是「浪費」了，從第二次投擲起可看做一個全新的開始，因此從第二次起平均而言還需投擲 E 次才會出現 5（也就是連同第一次總共需擲 $(1 + E)$ 次），所以下式成立：

$$E = 1(p) + (1 + E)(q)$$

代入 $p = 1/6$ 及 $q = 5/6$ 即可解得 $E = 6$ 。這樣做是不是省事多了呢？

下面我們看一個跟擲硬幣有關的例子。假設我們用 0 和 1 分別代表一枚硬幣的兩面（例如 1 代表「梅花」而 0 代表「人頭」），而且硬幣被投擲後每一面出現的機率都是 $1/2$ 。考慮

以下問題：將一枚硬幣投擲兩次，如果這兩次投擲的結果不同的話再擲兩次，如果這兩次的結果不同的話再擲兩次……，直到某兩次投擲的結果相同（即擲出兩個 0 或兩個 1）為止。平均而言，以上過程共需投擲硬幣幾次？

由於投擲一枚硬幣兩次總共有 00, 01, 10, 11 等四種可能的結果，其中符合要求的占了兩種（即 00 與 11），發生的機率為 $2/4 = 1/2$ ，因此如果所需投擲次數的期望值為 E ，那麼投擲過程有 $1/2$ 的機率僅需擲兩次，有另外 $1/2$ 的機率需擲 $(2 + E)$ 次，因此

$$E = \frac{1}{2}(2) + \frac{1}{2}(2 + E)$$

由上式可很快解得 $E = 4$ 。

如果我們持續投擲一枚硬幣直到出現連續三個 0 為止，所需投擲次數的期望值又是多少呢？假設平均而言需 E 次。由於投擲過程中我們必須隨時累計已經出現了連續幾個 0，而每當出現 1 就須將 0 的累計次數歸零，一切重新開始，因此我們可依 1 出現的時機將所有可能的投擲過程分成以下四類：

投擲順序	機率	投擲次數
1...	$1/2$	$E + 1$
01...	$1/4$	$E + 2$
001...	$1/8$	$E + 3$
000	$1/8$	3

由於整個過程所需投擲次數的期望值為 E ，因此

$$E = \frac{1}{2}(E + 1) + \frac{1}{4}(E + 2) + \frac{1}{8}(E + 3) + \frac{1}{8}(3)$$

由上式可解得 $E = 14$ 。

接著我們看一個常被稱做「巴格達的小偷」的問題（thief of Baghdad problem）。假設有一個小偷被關在巴格達的某座監獄的一間圓形牢房裡；已知這間牢房的四周牆壁上等距分布著三扇門，每扇門的外觀皆相同，每當小偷要從其中選擇一扇門逃走時，每扇門被選中的機率都是 $1/3$ ，而且每扇門都只能由牢房裡單向開啟，當人通過後即自動關上，無法回頭。如果這三扇門當中有一扇門打開後可直通外面的世界，另一扇門打開後是一條地道，循著該地道走 S 天後將使得小偷重新回到原來的牢房中，而另一扇門的情況類似，循著一條地道走 L 天後也將使得小偷回到原來的牢房中，請問：平均而言，每個被關在這間牢房的小偷在成功走出監獄前在地道裡總共走了多少天？

假設所求為 E 。如果小偷一開始選中的是連接需走 S 天的地道的門，那麼他走了 S 天回到原來的牢房後只是回歸原點，一切須重新開始，因此平均而言他還需走 E 天才能出獄（總共走了 $(S + E)$ 天）；如果他一開始選中的是連接需走 L 天的地道的門，那麼情況類似，平均而言他總共需走 $(L + E)$ 天才能出獄；而如果他運氣好，一開始就選中可直通外面的世界的門，那麼他根本就不用走地道。因此下式成立：

$$E = \frac{1}{3}(S + E) + \frac{1}{3}(L + E) + \frac{1}{3}(0)$$

由上式可解得 $E = S + L$ ，因此每個小偷平均而言需在地道裡走 $(S + L)$ 天。

最後我們看個較不一樣的問題。對某正整數 n ，假設我們從 $1, 2, \dots, n$ 等數中任選一數（範圍中的每個數被選中的機率都一樣），如果選中的數 X_1 不是 1，我們接著從 $1, 2, \dots, X_1$ 等數中再任選一數，如果選中的數 X_2 不是 1，我們從 $1, 2, \dots, X_2$ 等數中再任選一數……，整個過程持續進行到某個階段所選中的數 X_m 等於 1 為止。請問： m 的期望值是多少？（即，上述過程平均而言需歷經幾個階段？） m 的期望值當然和一開始的 n 的大小有關；如果我們以 $f(n)$ 表示 m 的期望值，那麼 $f(1)$ 的值顯然為 1。

考慮第一個階段所做的選擇。我們須從 $1, 2, \dots, n$ 等數中任選一數，每個數被選中的機率都是 $1/n$ 。如果選中的數為 n ，那麼我們在第二個階段所面對的情形和第一個階段一模一樣，只是平白浪費了一次選擇，因此整個過程平均來說需歷經 $(1 + f(n))$ 個階段。如果第一個階段選中的數是 $(n-1)$ 呢？這樣一來第二個階段將只剩下 $(n-1)$ 個數可供選擇，因此從第二個階段開始平均而言還需歷經 $f(n-1)$ 個階段（整個過程平均而言需 $(1 + f(n-1))$ 個階段）。依此類推，對任意介於 n 與 2 之間（含 n 和 2）的整數 k ，整個過程平均而言皆需歷經 $(1 + f(k))$ 個階段，而如果第一個階段就選中 1，那麼整個過程僅需 $f(1)$ （即 1）個階段。因此

$$f(n) = \frac{1}{n}(1 + f(n)) + \frac{1}{n}(1 + f(n-1)) + \dots + \frac{1}{n}(1 + f(2)) + \frac{1}{n}(f(1))$$

經過移項整理可得

$$f(n) = 1 + \frac{1}{n-1}(f(1) + f(2) + \dots + f(n-1))$$

因此

$$f(n-1) = 1 + \frac{1}{n-2}(f(1) + f(2) + \dots + f(n-2))$$

由上面兩式不難整理得 $f(n) = f(n-1) + 1/(n-1)$ ，再配合已知的 $f(1) = 1$ 很容易可推導出 $f(n)$ 的一般式為

$$f(n) = 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}\right).$$

當 $n = 1000$ 時由上式可求得 $f(1000)$ 的值大約是 8.484。筆者實際寫了一個程式以亂數於各階段選數，並且讓該程式連續做 10000 次來取平均，所得的平均次數大約是 8.466，的確與理論值相當接近。

本文介紹的重新出發的概念在述語上稱做「遞迴」，英文為 recursion，該字是由 re（重新）與 cur（跑）兩個字根組成，單字的意思由字根的角度看來相當明顯。遞迴的觀念不論是在數學解題或是電腦演算法的設計上都扮演著重要的角色。