Sin($\alpha + \beta$) 的由來

古宗翰
國立暨南國際大學資訊工程學系碩士班
thku@alg.csie.ncnu.edu.tw

在中學時, 你可能已經將 $sin(\alpha+\beta)=sin(\alpha)\times cos(\beta)+sin(\beta)\times cos(\alpha)$ 背得滾瓜爛熟, 但你是否清楚它的由來, 它是怎麼被證明出來的呢?

今天我們將介紹兩種證明方式來告訴各位 sin($\alpha+\beta$) 的由來, 首先我們將介紹第一種證明方式, 在第一種證明方式中, 我們將引用數個定理來證明, 在證明 $sin(\alpha+\beta)=sin(\alpha)\times cos(\beta)+sin(\beta)\times cos(\alpha)$ 前, 我們先來介紹我們將引用到的定理.

《幾何原本》第三冊，定理 20:
在一圓中, 同一弧所對之圓心角為圓周角的兩倍.
證明:

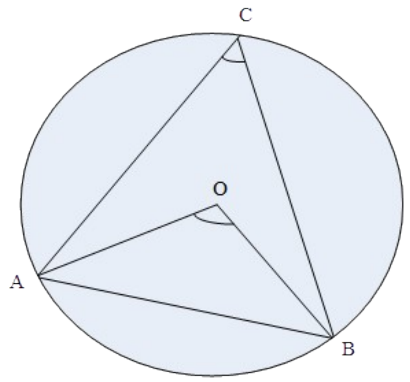

Figure 1

Figure 1 是一個圓, 圓心為 O, ∠ACB 為一對到弧 AB 的圓周角, ∠AOB 為一對到弧 AB 的圓心角.

現在我們要證明 2∠ACB=∠AOB. 首先我們先對 ΔABC 做一輔助線, 如 Figure 2 所示.

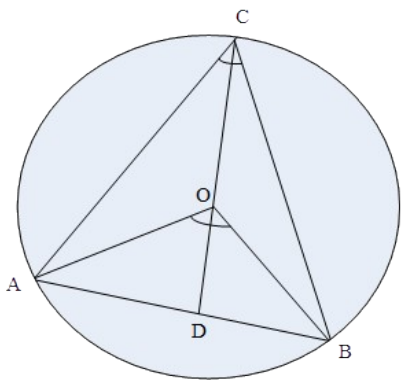

Figure 2

在 ΔAOC 中, ∠AOD=∠ACO+∠OAC (這是三角形的性質, 任一角的外角等於另外兩角之和).

在 ΔBOC 中，∠BOD=∠BCO+∠OBC 將這兩式子相加會得到下列式子

∠AOD+∠BOD =∠ACO+∠OAC+∠BCO+∠OBC (1)

在 ΔAOC 中，∵ $\overline{AO}$=$\overline{CO}$=圓的半徑 ∴ΔAOC 為一等腰三角形

則∠OAC=∠ACO (2)

在 ΔAOC 中，∵ $\overline{BO}$=$\overline{CO}$=圓的半徑 ∴ΔBOC 為一等腰三角形

則∠OBC=∠BCO (3)

結合(1)(2)(3)式會得到

∠AOB=∠AOD+∠BOD =∠ACO+∠ACO+∠BCO+∠BCO

= 2(∠ACO+∠BCO)=2∠ACB 得証

根據這個定理, 我們可以推導出兩個引伸的定理: (1)在同一圓中, 對同一條弦的所有圓周角都相等; (2) 所有對應於直徑的圓周角都是直角.

接下來我們將利用上面所介紹的定理推倒出正弦定理, 首先我們觀察 Figure 3 and Figure 4.

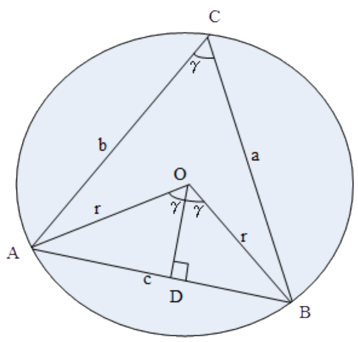

Figure 3

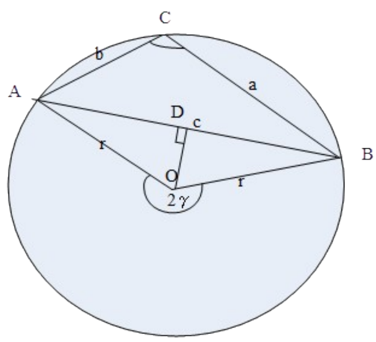

Figure 4

在 Figure 3 中, ΔAOB 為一等腰三角形, $\overline{OD}$ 為 ΔAOB 的中垂線, 在 ΔAOD 中, $sin\gamma$=(c/2)/r 由此式子我們可以推導出 c/$sin\gamma$=2r, 若∠A=α,∠B=β 同理我們可以推導出 b/$sin\beta$=2r , a/$sin\alpha$=2r, 則 $\frac{a}{sin\alpha}=\frac{b}{sin\beta}=\frac{c}{sin\gamma}=2r$ ，此式子即為正弦定理.

在 Figure 4 中, ΔAOB 為一等腰三角形, $\overline{OD}$ 為 ΔAOB 的中垂線, 在 ΔAOD 中, sin(180-γ)=$sin\gamma$=(c/2)/r, 由此式子我們可以推導出 c/$sin\gamma$=2r, 若∠A=α, ∠B=β 同理我們可以推導出 b/$sin\beta$=2r , a/$sin\alpha$=2r

則 $\frac{a}{sin\alpha}=\frac{b}{sin\beta}=\frac{c}{sin\gamma}=2r$ (4)

接下來我們將介紹托勒密定理

托勒密定理: 任何元內接四邊形的對角線所形成的長方形, 等於兩對邊所形成的長方形的和.

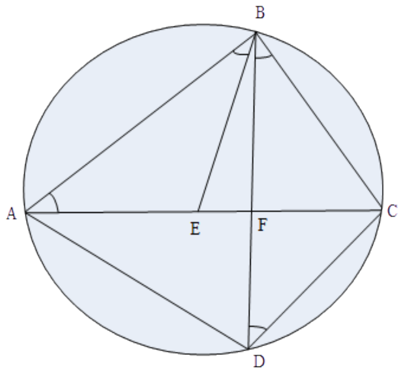

Figure 5

我們用 Figure 5 來說明托勒密定理, Figure 5 中有一四邊形 ABCD, 對角線所形的長方形是指由兩個對角線為長寬的一長方形面積, 對照 Figure 5 就是由 $\overline{AC}$ 和 $\overline{BD}$ 為長方形的長寬的一個長方形面積, 而兩對邊所形成的長方形是指分別人兩組對邊所形成的長方形的面積, 對照 Figure 5 就是由 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ 和 $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ 兩組對邊所形成的長方形面積, 所以對照 Figure 5 托勒密定理即為

$$\overline{AC}\times\overline{BD}=\overline{AB}\times\overline{CD}+\overline{AD}\times\overline{BC} \qquad (6)$$

證明:

在 Figure 5 中, 過 B 點劃一直線交 $\overline{AC}$ 於 E 使得∠ABE=∠DBC. 在 ΔABE 與 ΔDBC 中, ∠ABE=∠DBC, ∠CAB=∠BDC (∵此兩圓周角對等弦). 因此 ΔABE 與 ΔDBC 為相似三角形, 所以我們可以得到 $\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{DC}}{\overline{DB}}$,

則 $$\overline{AE}\times\overline{DB}=\overline{AB}\times\overline{DC} \qquad (7)$$

在 ΔABD 與 ΔEBC 中, ∠ABD=∠EBC (∵ ∠ABE+∠EBD=∠DBC+∠EBD), ∠BDA=∠BCE (∵此兩圓周角對等弦). 因此 ΔABD 與 ΔEBC 為相似三角形, 所以我們可以得到 $\frac{\overline{EC}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{CB}}$,

則 $$\overline{EC}\times\overline{DB}=\overline{AD}\times\overline{CB} \qquad (8)$$

將(7)式和(8)式相加, 則我們可以得到

$$(\overline{AE}+\overline{EC})\times\overline{DB}=\overline{AB}\times\overline{DC}+\overline{AD}\times\overline{CB} \qquad (9)$$

因為 $\overline{AE}+\overline{EC}=\overline{AC}$ 所以我們可以將第(9)式改成下式

$$\overline{AC}\times\overline{BD}=\overline{AB}\times\overline{CD}+\overline{AD}\times\overline{BC}$$ 得証

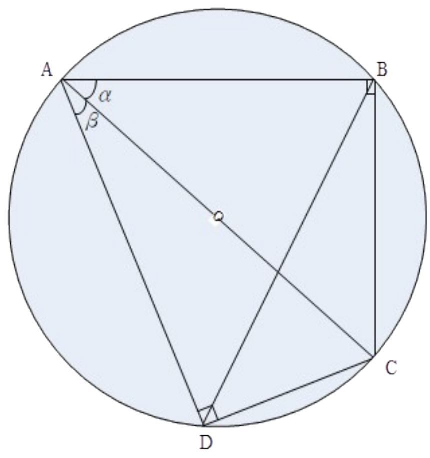

Figure 6

根據我們上面所介紹的正弦定理以及 Figure 6, 若 Figure 6 為一單位圓(即直徑為 1 單位的圓), 我們可以求出 $\overline{AB}=cos(\alpha)$, $\overline{BC}=sin(\alpha)$, $\overline{CD}=sin(\beta)$, $\overline{AD}=cos(\beta)$, $\overline{BD}=sin(\alpha+\beta)$, 如 Figure 7 所示.

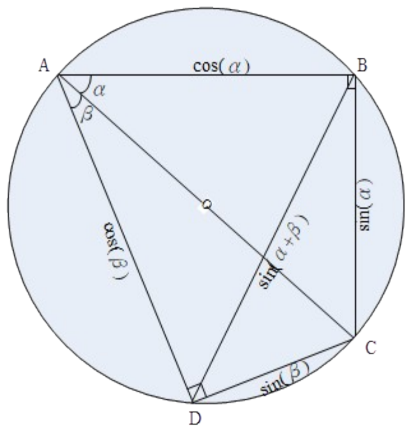

Figure 7

接著我們在根據托勒密定理 $\overline{AC}\times\overline{BD}=\overline{AB}\times\overline{CD}+\overline{AD}\times\overline{BC}$

則可以得到 $1\times sin(\alpha+\beta)=cos(\alpha)\times sin(\beta)+cos(\beta)\times sin(\alpha)$

則 我們可以得到 $sin(\alpha+\beta)=sin(\alpha)\times cos(\beta)+sin(\beta)\times cos(\alpha)$

接下來我們介紹第二種證明$sin(\alpha+\beta)=sin(\alpha)\times cos(\beta)+sin(\beta)\times cos(\alpha)$的方法.

證明:

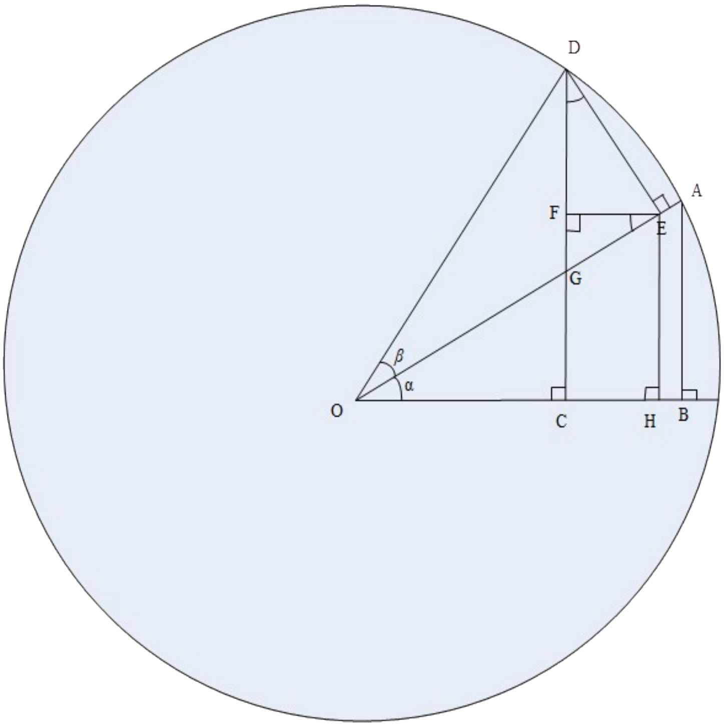

Figure 8

首先我們觀察 Figure 8, 圓 O 為半徑為一單位長的圓, 在 ΔODC 中, $\overline{DC}=sin(\alpha+\beta)$.

在 ΔOGC 與 ΔDGE 中

$\because\angle OGC=\angle DGE$ (對頂角相等), $\angle GCO=\angle GED=90^\circ$, $\therefore\Delta$OGC 與 ΔDGE 為相似三角形, 則$\angle GDA=\angle GOC=\alpha$

在 ΔODE 中, $\overline{DA}=sin(\beta)$, 又在 ΔDFE 中, $\overline{DF}=cos(\alpha)\times\overline{DA}=cos(\alpha)\times sin(\beta)$.

在 ΔODE 中, $\overline{OE}=cos(\beta)$, 又在 ΔOEH 中, $\overline{EH}=sin(\alpha)\times\overline{OE}=sin(\alpha)\times cos(\beta)$.

在 Figure 8 中, $\overline{DC}=\overline{DF}+\overline{FC}=\overline{DF}+\overline{EH}$,

則 $sin(\alpha+\beta)=\overline{DC}=\overline{DF}+\overline{EH}=cos(\alpha)\times sin(\beta)+sin(\alpha)\times cos(\beta)$ 得証

【參考資料】

1. 《毛起來說三角》, 毛爾 , 天下文化出版社
2. 《幾何原本》, Euclid , 九章出版社