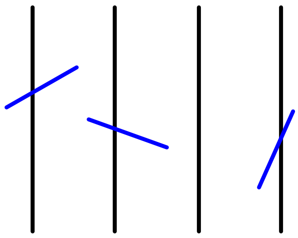
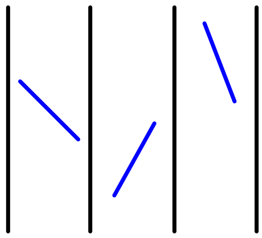
大針小針落地板

許介彥
大葉大學電信工程學系
chsu@mail.dyu.edu.tw

假設你和我一起站在一個很大的房間的中央，房間的地板上畫著許多互相平行的直線，線與線之間的距離都是一吋。如果我邀你跟我玩一個遊戲，我將手上的一根長度為一吋的針往上拋出讓它自由落下，當針靜止於地板上後如果它與地上的直線有交點的話你給我 100 塊錢，否則我給你 100 塊錢，你該跟我玩這個遊戲嗎？下面的左圖與右圖分別顯示了針與地上的線有交點與沒有交點的幾個可能的情形：





該不該玩當然取決於針與地上的直線有交點的機率是多少；假設其值為 p（$0 \le p \le 1$），以下我們將設法求出 p 的值。

由於針的長度為一吋，地上的線與線之間的距離也是一吋，因此針無法同時跨過地上的兩條線；雖然針有可能同時與兩條線相交，不過這僅發生於針與地上的線垂直而且針的兩頭正好抵在兩條線上時，發生的機率微乎其微；另一種也幾乎不可能發生的情形是針與地上的某條線重合。以上兩種情形雖然針與地上的線有不只一個交點，不過發生的機率都小到可視為不可能發生，因此 p 其實可以說是當針靜止後與地上的線有「一個」交點的機率。

既然針與地上的線不是沒有交點就是有一個交點，如果我們將針連續投擲 n 次，針與地上的線總共將有約 np 個交點，平均而言，每次投擲針與地上的線有 $np/n = p$ 個交點。這種將 p 視為針與地上的線的平均交點數的看法雖然有點奇怪，不過對我們接下來求 p 的工作將很有幫助。

請先考慮針的長度不是一吋的情形。假使針的長度為兩吋，由於我們可將一根兩吋長的針視為是由兩根各一吋長的針連接而成，因此投擲一根兩吋長的針其實就如同於同時投擲兩根各一吋長的針，這兩根針的每一根單獨來看的話與前面的投擲一吋長的針的情形並無不同；既然平均而言每次投擲一吋長的針與地上的線會有 p 個交點，同時投擲兩根的話交點數應當是兩倍，因此平均而言每次投擲兩吋長的針會與地上的線有 $2p$ 個交點。同理，每次投擲三吋長的針平均而言與地上的線會有 $3p$ 個交點。

如果針的長度是 1/3 吋呢？情況還是類似，由於一根一吋長的針可視為是由三根各 1/3 吋長的針連接而成，投擲一根一吋長的針的平均交點數（即 p）一定是投擲一根 1/3 吋長的針

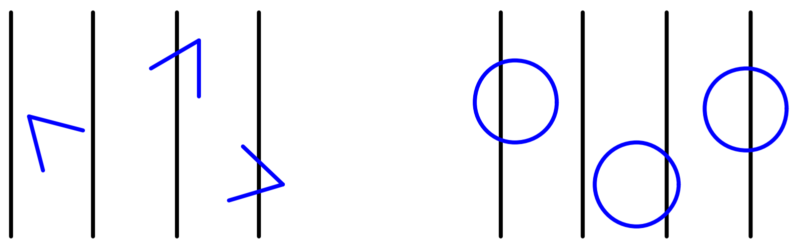
的平均交點數的三倍，因此平均而言每次投擲 1/3 吋長的針會與地上的線有 $(1/3)p$ 個交點。同理，每次投擲 2/3 吋長的針平均而言與地上的線會有 $(2/3)p$ 個交點。

由以上推論不難得知：一般來說，當針的長度為 x 吋（x 為任意實數）時，平均而言每次投擲會與地上的線有 xp 個交點。

接著我們考慮所投擲的針的形狀不是直線的情形。想像我們所投擲的東西不是針而是較柔軟的鐵絲，如果我們將一根兩吋長的鐵絲折成 V 字形，使得 V 字形的兩條邊各一吋長，那麼投擲這個 V 字形鐵絲顯然和剛才提過的投擲兩吋長的針的情形類似，還是可以視為是同時投擲兩根各一吋長的針，因此平均而言每次投擲這個兩吋長的 V 字形鐵絲會與地上的線有 $2p$ 個交點。同理，如果我們將一根三吋長的鐵絲折成 Z 字形，平均而言每次投擲這個三吋長的 Z 字形鐵絲與地上的線會有 $3p$ 個交點。

從上面的論述我們又知道：鐵絲的「形狀」不是重點，只有長度才重要。對一根長度為 x 吋的鐵絲來說，不管我們將它折成什麼形狀，只要它靜止後是整根鐵絲平貼於地面上，那麼平均而言每次投擲這根鐵絲都會與地上的線有 xp 個交點。請注意上面所說的形狀也包含了將鐵絲折成曲線的情形，因為任何曲線都可以看成是由許多小線段連接而成。

萬事俱備了，接下來我們進行關鍵的一步：將一段長度為 p 吋的鐵絲彎成一個直徑為一吋的圓，然後投擲這個圓。由上面的論述可知平均而言它每次會與地上的線有 $p\,p$ 個交點。投擲直徑為一吋的圓與前面看過的投擲各種長度的針或 V 形或 Z 形鐵絲其實有很大的不同；以投擲 V 形鐵絲為例，每次投擲後與地上的線的交點數有可能有 0 個、1 個、2 個等三種可能（見下圖左），但是投擲一個直徑為一吋的圓卻是不論怎麼投擲它與地上的線的交點數都是兩個（見下圖右），沒有其他可能。



既然每次投擲直徑為一吋的圓與地上的線的交點數都是兩個，交點數的平均值當然也是兩個；而我們由鐵絲的長度已經知道投擲此圓的平均交點數是 $p\,p$ 個，因此 $p\,p = 2$，也就是說，$p = 2/p \approx 0.637$——大功告成！在明瞭了平均交點數只和鐵絲的長度有關而與形狀無關後，我們化被動為主動，透過自己所選擇的特定形狀與長度的鐵絲（即直徑為一吋的圓）終於將 p 的值給「逼」了出來。

讓針自由落在地上的動作表面上看起來和圓一點關係也沒有，然而針與地上的線相交的機率竟和圓周率有關，令人不得不讚歎數學的奇妙。本文所介紹的是古典機率中有名的問題，通常稱作 Buffon's Needle Problem，因法國自然學家 Georges Buffon（1707–1788）而得名。這個問題除了本文提供的方法外也不難利用微積分來解決，學過微積分的讀者不妨試試看，而會寫程式的讀者則可試試透過亂數模擬多次擲針來求得圓周率 p 的近似值。