微積分的歷史

項　潔

國立暨南國際大學資訊工程系

hsiang@csie.ncnu.edu.tw

講到微積分，相信不少大一學都聞之色變，而且可能覺得這是一門沒有用的學問。其實微積分是一個基本的科學工具，而且和其他的工具一樣，有一個以應用為出發點的歷史。

古早時代人們因為要測量農地、建築房舍，需要計算長度與面積的方法，通常面積都是以正方形為基礎 (如一平方公尺)，如此可以得到正方形、矩形、三角形等等的面積，但是如果是圓形，或不規則形的話，那該怎麼辦？以圓周率為例，四千年前巴比倫人用 3 又 1/8 (3.125)當做圓周率，同時期的埃及人則用 16/9 的平方。其實從使用層面而言兩者的誤差都在 1%以下，雖不中亦不遠矣，所以將就著用，也就用了兩千年。到了西元前三世紀的時候希臘科學家阿基米德想出一個突破性的做法。他用「窮盡逼近法」同時用圓內接與圓外切從正六邊形開始夾擠計算圓周率的近似值，然後正 12 邊形，正 24 邊形等等，如此到正 96 邊形時就可得到圓周率在 3 又 10/71 與 3 又 1/7 之間。當然再往下分越細就可得到越精確的估計。其實這些東西不是西方人的專利，在其他古文明裡也被使用。三國時代的劉徽就用過類似的逼近法。用劉徽的方法，在邊數增加到 3072 的時候，圓周率就是 3.14159，和我們現在一般使用的相同。

「窮盡逼近法」原理雖簡單，但對於不同的問題不見得好用。阿基米德為了彌補窮盡法的不足，將面積想像成無限多條細線的集合，然後把它們「積」起來就得到面積。這基本上來講就是「積分」的精神，但當時對於「無限多」和「細線」並沒有很明確的概念。等到這些問題被釐清了，積分就成熟了。

「無限」的觀念是非常有趣的，古代希臘哲學家特別對這個問題著迷。西元前 450 年時 Zeno 就用「無限」來 "證明" 「移動」是不可能的。他的證明如下：要從 A 走到 B 必須經過一個中心點 B_1，那從 A 走到 B_1 又得先經中心點 B_2，如此類推從 A 走到 B 必須經過無限個中心點，但既然時間是有限的，所以從 A 永遠無法到 B。當然從經驗法則的觀點來看，既然我們每天都可以走來走去，所以他的論證一定有其吊詭的地方，但真的要從邏輯上反駁，也不是那麼容易的一件事情。

除了圓周率之外，阿基米德還用他發明的「積分」方法算出球的體積與表面積、圓椎體的體積與表面積等等各種問題。

希臘人土法煉鋼的積分方法在西方一直用到 16 世紀都沒有太大變動。文藝復興後各種學科均興盛起來，也就需要更精密的測量方法。偉大的天文學家克卜勒(Kepler)就用前面所提的「線積」法計算行星的軌道。有趣的是在一個重要的計算裡，克卜勒犯了兩個錯誤，但這兩個錯誤正好彼此抵消，所以結果還是對的！

相對於積分來講，微分的開始就晚多了。16 世紀後期費瑪 (Fermat) 考慮如何決定一個函數的相對極大值 (maxima) 與相對極小值 (minima)。他發現極大值與極小值均發生在斜率是 0 的時候。費瑪對於拋物線的面積也有研究，所以嚴格來說他是第一個又研究微分，又研究積分的人。除了這個數學問題外，因為機械的產生又使得人們開始思考速度、加速度、曲線的切線，與重心的問題，這些都已進入微分的範疇。

以速度為例，平均速度的觀念是很容易了解的，但瞬間速度又該如何定義呢？當時除了克卜勒的行星運動定率外，伽利略的落體運定律、鐘擺與拋物體運動等等都使人知道在許多自然現象裡運動不是等速的，所以有研究瞬間速度的必要。最直接的想法就是把一段時間內速度的平均當成瞬間速度，但這段時間該多短呢？因為不管多短，把它除以二又會得到更短的一段時間 (回到 Zeno 的老問題)，所以歸根究柢還是需要發展一個能夠捕捉無限的觀念。

到了 17 世紀後期兩個偉大的數學家終於把微分和積分整合在一起，而微積分就誕生了。這兩位分別是牛頓和來布尼茲。

牛頓 (Newton, 1642-1727) 最著名的的成就當然是發現地心引力。做為一個物理學家，他對速度的變化較有興趣，所以他是以研究微分為出發點的。在 1666 年時為了解決某個問題，牛頓用到了「反微分」的觀念，並用這個做法來找曲線定義的面積，其實他的反微分就是積分。他並且十分清楚的陳述出了「微積分基本定理」。這個定理是說若將一個函數 $f(x)$ 積分再微分後，其結果還是 $f(x)$；而若將 $f(x)$ 微分再積分，則會是 $f(x)+c$，與 $f(x)$ 所差的只是一個常數。換句話說，積分和微分正好是彼此的反運算。這個定理整合了微分和積分，也奠定了我們今天所謂微積分的基礎。

雖然牛頓的結果 (Analysis with Infinite Series) 在 1669 年就寫好了。這本書一直到 1711 年才發表，在這段時間他的結果在歐洲以手稿的方式在知識界流傳，他的結果可能直接或間接影響到下一位微積分史上的重要人物來布尼茲。

來布尼茲 (Leibnitz, 1946-1712) 的出發點與牛頓不太一樣。他是從解析的觀點把一個變數的 domain 看做一群無限彼此靠近的點的集合，他也導出與牛頓相似的微積分基本定理。來布尼茲在選擇符號上非常小

心 (這點是與牛頓大不相同的)，所以我們今天在微積分裡的符號大部份是沿用他的，也奠定了他與牛頓分享微積分之父的名號。而微積分 (calculus) 這個名詞也是來布尼茲取的。1684 年他將他的 (積分) 結果用 "Calculus Summatorius" 之名發表，1690 年另一位偉大數學家 Jacob Bernoulli 建議改成 calculus 即可，如此沿用至今。

雖然 17 世紀空之後的微積分有長足的發展，但一直被哲學家批評沒有紮實的邏輯基礎。這也難怪，因為到 19 世紀之前西方的數學還是以計算為主，對論證並沒有多大興趣。這個現象一直到 19 世紀中葉 Cauchy, Riemann, Weierstrass 等對「無限逼近」、「limit」等觀念做抽象而嚴謹化後才大大改變。這些抽象的觀念不僅對微積分，而且對整個數學發展都做了天翻地覆的變化，但是抽象符號後面的邏輯基礎真的是比較紮實嗎？那就又是另一個故事了。

參考資料：

(1) 曹亮吉，"微積分史話"

(2) http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/