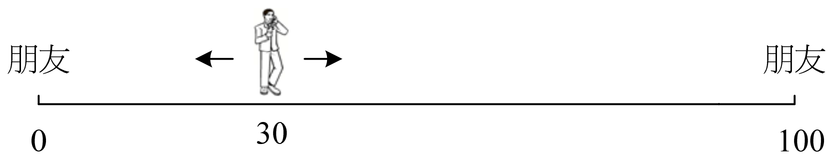
# 搖擺的旅程

許介彥
大葉大學電信工程學系
chsu@mail.dyu.edu.tw

張三頗好杯中物，喜歡在下班後到某間酒吧喝上幾杯，然後帶著醉意踏著踉蹌的腳步去找朋友聊天；他的兩個好朋友的家與這間酒吧位在同一條巷子裡，與酒吧的距離分別是 30 步與 70 步，如下圖所示（我們將張三在巷子裡的走動看成是在數線上左右移動）：




如果張三喝完酒想找朋友時心中都沒有預設的對象（找到任何一個朋友皆可），而且由於頭腦已經分不清方向，張三在行走途中的每一步往右與往左的機率都是$1/2$，請您猜猜看，他從上圖的坐標 30 出發後直到走到任何一個朋友的家為止，平均而言大約需走幾步？（即，他從酒吧走到任何一個朋友的家所需步數的「期望值」是多少？）

先看較簡單的情形。如果酒吧位於坐標 1 而張三的兩個朋友的家分別位於坐標 0 及 2，很顯然張三只需走一步就行了，所需步數的期望值（以下記為 $E$）為 1。如果酒吧位於坐標 2 而兩個朋友的家分別位於 0 及 4 呢？由於張三所邁出的最前面兩步不外乎左左、左右、右左、右右等四種可能，我們將各種情形發生的機率以及所需步數整理如下：

| 行走順序 | 機率 | 總步數 |
|---|---|---|
| 左左 | $1/4$ | $2$ |
| 左右 ⋯ | $1/4$ | $2+E$ |
| 右左 ⋯ | $1/4$ | $2+E$ |
| 右右 | $1/4$ | $2$ |

上表中，如果最前面兩步是左左或右右，那麼張三走了兩步之後就已經到達某個朋友的家，因此總共只需走兩步；如果最前面兩步是左右或右左，那麼張三走了兩步後只是回到起點，一切須重新開始，因此平均而言還需走 $E$ 步（總共走了 $2+E$ 步）。由於整個行走過程所走的步數的期望值為 $E$，因此

$$E = \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{4}(2+E) + \frac{1}{4}(2+E) + \frac{1}{4}\cdot 2$$

由此式可解得 $E = 4$。

現在回到原來的問題。我們考慮更具一般性的情形：假設張三的兩個朋友的家分別位於

坐標 0 及 $L$，而且我們希望求出以坐標 $k$ 爲起點走到 0 或 $L$ 爲止所需步數的期望值（記作 $E_k$ ）是多少；我們原來的問題中 $L=100$ 且希望求出 $E_{30}$ 的值。請注意 $E_0=E_L=0$ ，因爲如果起點爲 0 或 $L$，那麼張三不用走就已經到了。

還是用遞迴的方式來思考。對任意起點 $k$（ $1\le k\le L-1$ ），張三從 $k$ 出發走了一步之後可能的位置有 $k-1$ 與 $k+1$ 兩種可能（發生的機率各是 $1/2$ ）；既然以 $k-1$ 爲起點時所走的步數的期望值爲 $E_{k-1}$ ，以 $k+1$ 爲起點時所走的步數的期望值爲 $E_{k+1}$ ，下面這個關係一定成立：

$$E_k=\frac{1}{2}(1+E_{k-1})+\frac{1}{2}(1+E_{k+1})$$

也就是

$$E_k=\frac{1}{2}E_{k-1}+\frac{1}{2}E_{k+1}+1,\qquad 1\le k\le L-1.$$

只要將上式配合已知的 $E_0=E_L=0$ ，我們就有了足夠的資訊來求出任意 $E_k$ 的值。由於上式又可寫爲

$$(E_k-E_{k+1})=(E_{k-1}-E_k)+2$$

如果我們令 $f_k=E_k-E_{k+1}$ ，那麼上式可簡潔地表爲 $f_k=f_{k-1}+2$ ，可知數列 $f_0,f_1,\ldots,f_{L-1}$ 的任意連續兩項之間都差 2，因此一般而言， $f_k=f_0+2k$ 。我們須設法求出 $f_0$ 的值。

如果我們將所有的 $f_k$ 相加，得

$$\sum_{k=0}^{L-1}f_k=(E_0-E_1)+(E_1-E_2)+(E_2-E_3)+\cdots+(E_{L-1}-E_L)=E_0-E_L=0-0=0$$

然而另一方面，

$$\sum_{k=0}^{L-1}f_k=\sum_{k=0}^{L-1}(f_0+2k)=Lf_0+2\sum_{k=0}^{L-1}k=L(f_0+L-1)$$

因此 $L(f_0+L-1)=0$ ，解得 $f_0=1-L$ 。有了 $f_0$ 的值，要求出任意 $E_k$ 就不難了，因爲

$$E_k=(E_k-E_{k+1})+(E_{k+1}-E_{k+2})+\cdots+(E_{L-1}-E_L)$$

所以

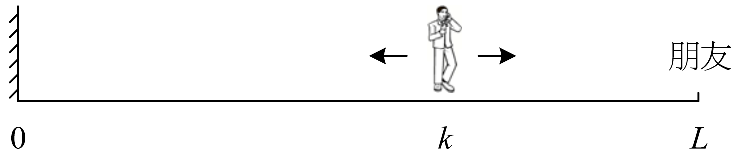
$$E_k=\sum_{i=k}^{L-1}f_i=\sum_{i=k}^{L-1}(1-L+2i)=k(L-k).$$

因此對任意起點 $k$，由 $k$ 走到 0 或 $L$ 所需步數的期望值就等於由起點到 0 與由起點到 $L$ 這兩段距離的乘積。我們原來的問題所求的 $E_{30}$ 因此等於 $30\times 70=2100$；這比一般人憑直覺所做的猜測還要大上很多。

上面的關係也說明了如果張三的兩個朋友的家分別位於坐標 0 及 100 處，而酒吧位在坐標 1，平均而言張三需走 99 步才能走到任何一個朋友的家；這更是違反一般人的直覺，因爲對張三而言，他的兩個朋友中有一個根本是「一蹴可幾」的，所需步數的期望值似乎不應該

那麼大。爲了驗證上面的結論的正確性，筆者實際寫了一個程式來模擬張三的行走過程，從 1 出發直到走到 0 或 100 爲止，並且讓該程式連續做 10000 次來取平均，所得的平均步數大約是 93.62——果然與直覺不符。

如果酒吧是位於一條死巷裡，而且張三的某個朋友的家與酒吧相距 $L$ 步，那麼張三由酒吧出發後直到走到這位朋友的家爲止所需步數的期望值又是多少呢？下圖中，我們將巷底以及張三的朋友家的坐標分別定爲 0 及 $L$，而張三的行走過程是由某點 $k$ 出發直到走到 $L$ 爲止：




請注意由於巷子是死巷，因此如果張三在某個時刻走到了坐標 0，他的下一步非往右走到坐標 1 不可。如果我們仿照前面的作法，將張三由 $k$ 出發後走到 $L$ 爲止所需步數的期望值記作 $E_k$ ，那麼我們已經知道 $E_L = 0$ 且 $E_0 = 1 + E_1$ 。我們同樣令 $f_k = E_k - E_{k+1}$ ，同樣可導出 $f_k = f_{k-1} + 2$ ，不過此時的 $f_0$ 很容易求得：

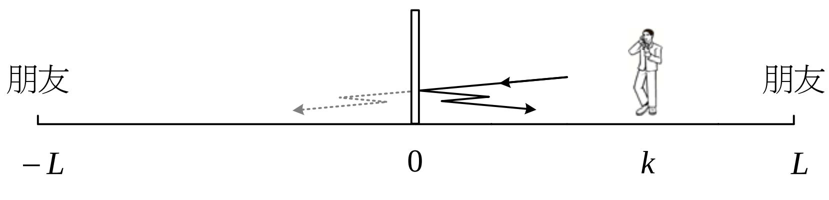
$$f_0 = E_0 - E_1 = (1 + E_1) - E_1 = 1$$

既然有了 $f_0$ 的值，我們可求出對任意起點 $k$（ $0 \le k < L$ ）， $E_k$ 的一般式爲

$$E_k = \sum_{i=k}^{L-1} f_i = \sum_{i=k}^{L-1} (f_0 + 2i) = \sum_{i=k}^{L-1} (1 + 2i) = L^2 - k^2 .$$

上式的一個較特殊的情形發生於 $k = 0$ ，也就是酒吧正好位於巷底時；此時 $E_0 = L^2$ ，因此所需步數的期望值單純地就等於酒吧與朋友家的距離的平方；如果兩地的距離增爲兩倍，平均而言張三將需要花原來的四倍的力氣才能走到。

細心的讀者也許已經看出酒吧位於死巷的問題其實只是前面的問題的特例，相當於前面的問題中酒吧位於坐標 $k$ 而兩個朋友的家分別位於 $L$ 與 $-L$ 的情形；我們可想像在原點（坐標 0 處）立著一面鏡子可以將張三在前面的問題中所有原本在原點左方的行走路徑反射到原點右方，這樣一來就有了我們剛才的問題中的「死巷」的效果，如下圖所示：




由於上圖中酒吧與兩個朋友的家的距離分別爲 $L - k$ 與 $L + k$ ，由前面的問題的結論我們知道張三從酒吧走到任何一個朋友家所需步數的期望值爲 $(L-k)(L+k) = L^2 - k^2$，正與我們稍早所得的結果相同。

數學上常將物體在空間中隨機改變方向但步長固定的移動稱做「隨機行走」（random walk），在一度空間及二度空間時由於情境可生動地用醉漢的走路方式來描述，因此也常稱做「醉漢行走」（drunkard’s walk）。本文探討的問題即屬於在一度空間中隨機行走的問題。