

## 數位資料是如何混合及傳送的?

李家同

暨南大學資訊管理系

rctlee@ncnu.edu.tw

數位資料(digital data)是我們必須處理的資料,電腦裡的資料本來就是數位資料.但是影像,聲音等等的資料,一開始時卻是類比資料.我們經常利用所謂的類比和數位轉換(analog-to-digital)技術,將類比資料轉換成數位資料.

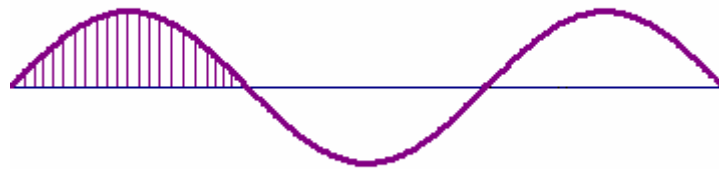


圖 1

圖 1 是一個典型的數位訊號,如果我們對這個訊號取樣(sample),就可以得到一連串的數字,以這個例子而言,也許這一連串的數字是 1,3,5,7,5,...每一個數字都對應一個數位資料.因此(1,3,5,7,5) 就變成了(001,011,101,111,101), 原來的類比資料現在只是數位資料,用數位的方式儲存資料,有很多的好處,限於篇幅,我無法在此詳加說明.

可是一旦資料變成了數位化,我們至少有兩個問題要克服:

- (1)如何將兩個位元(bits)混合起來送?
- (2)在無線情況之下,位元是如何傳送出去的?

也許有人根本不懂得這兩個問題之所在,所以我在此將這兩個問題解釋一下:

首先我要談第一個問題:

在電腦裡,一個位元可以用脈衝來表示.假如我們有(1,0,0,1,1)這一連串的位元,我們可以用以下的脈衝系列來表示:

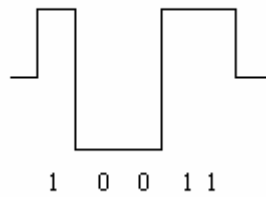


圖 2

如果我們每次送兩個位元,我們今面臨如何混合的問題,兩個脈衝是無法混合的,第一個位元 Bit 1 是 1,第二個位元 Bit 2 是 0,脈衝加起來是  $1+(-1)=0$ .事後我們無法還原 Bit 1 和 Bit 2 究竟是多少 所以這個如何混合兩個位元是一個大麻煩,也是我們必須去除的大麻煩.

現在我來談談第二個問題;如何將位元在無線環境中傳輸出去?

我們如果用一條傳輸線來傳輸數位資料,每一個位元可以用一個電壓來表示,也可以在傳輸線上將這一個電壓傳輸出去,但是如果在無線環境之中,我們所能傳輸的一定是電磁波,電磁波一定是個類比訊號,因此我們又面臨第二個難題:如何將數位資料在無線環境下傳輸?

要克服這兩個困難,我們可以一石二鳥,以一個方法一次解決這兩個問題,這個方法很簡單:我們仍用類比訊號來表示一個數位資料,這個原則幾乎是處理數位資料的萬靈藥.

我們現在舉一個例子,假設我們說第一位元(Bit 1)用 $a\cos(2\pi k f_c t)$  來表示第二個位元(Bit 2) 用 $b\cos(2\pi n f_c t)$  來表示, $k$ 和 $n$ 都是整數  $k \neq n$ , 如果Bit 1 是 1,  $a=1$  如果Bit 1 是 0,則 $a=-1$  決定 $b$ 的方法亦如是: 如果Bit 2 是 1,  $b=1$ , 如果Bit 2 是 0,  $b=-1$ , 這樣我們就可以混合兩個位元了. 混合位元的方法是將這兩個訊號加起來:

$$s(t) = a\cos(2\pi k f_c t) + b\cos(2\pi n f_c t)$$

$$a=1 \text{ 或 } -1,$$

$$b=1 \text{ 或 } -1,$$

以下的表陳列各種可能的情形

| (Bit 1, Bit 2) | 類比訊號                                   |
|----------------|----------------------------------------|
| (1,1)          | $\cos(2\pi kf_ct) + \cos(2\pi nf_ct)$  |
| (1,0)          | $\cos(2\pi kf_ct) - \cos(2\pi nf_ct)$  |
| (0,1)          | $-\cos(2\pi kf_ct) + \cos(2\pi nf_ct)$ |
| (0,0)          | $-\cos(2\pi kf_ct) - \cos(2\pi nf_ct)$ |

根據這種作法,我們也可以一舉兩得地解決無線環境的數位傳輸問題,我們曾經說過在無線環境中,我們一定要送電磁波,也就是說一定要送正弦波,用我們這種方法,當然也就使得無線環境傳輸的問題解決了.

我們也要強調,事實上我們傳輸所需的頻率是很高的,這種頻率俗稱 RF(radio frequency), 如何將一般頻率調高適 RF,稱為調變(modulation), 我曾經寫過有關調變的文章,登載在暨大電子雜誌上.各位不訪去找一下看看.

我們仍有一個問題:資料送到了對方接收者如何分辨 Bit 1 及 Bit 2 是什麼呢? 我們再看一下送的是什麼我們送的是

$$s(t) = a\cos(2\pi kf_ct) + b\cos(2\pi nf_ct)$$

我們是要判別  $a$  和  $b$  的值,我們就可以知道 Bit 1 和 Bit 2 是什麼了.

要判別  $a$  和  $b$  的值,我們可以利用數學裡的所謂內乘積(inner product), 假設我們有兩個函數  $f(t)$  和  $g(t)$ ,  $f(t)$  和  $g(t)$  的內乘積的定義如下:

$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$  我們所用的  $f(t)$  是和  $g(t)$  都是正弦函數,而且我們所用的頻率有一個基本頻率  $f_c$ ,對應這個頻率有一個週期  $T$ .

$$T = \frac{1}{f_c}$$

我們積分的範圍固然就是 0 到  $T$ .

$\langle \cos(2\pi kf_ct), \cos(2\pi nf_ct) \rangle$  究竟等於什麼呢? 這可以從兩個例子來看:

(1)  $k \neq n$

(2)  $k = n$

我們先看  $k \neq n$  的情形

$$\begin{aligned}
 & \langle \cos(2\pi k f_c t), \cos(2\pi n f_c t) \rangle \\
 &= \int_0^T \cos(2\pi k f_c t) \cos(2\pi n f_c t) dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^T \cos(2\pi(k+n)f_c t) + \cos(2\pi(k-n)f_c t) dt \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\sin(2\pi(k+n)f_c t)}{2\pi(k+n)f_c} \Big|_0^T + \frac{1}{2} \frac{\sin(2\pi(k-n)f_c t)}{2\pi(k-n)f_c} \Big|_0^T \\
 &= \frac{1}{2} [0 - 0] + \frac{1}{2} [0 - 0] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

現在我們來看  $k = n$  的情形:

$$\begin{aligned}
 & \langle \cos(2\pi k f_c t), \cos(2\pi k f_c t) \rangle \\
 &= \int_0^T \cos(2\pi k f_c t) \cos(2\pi k f_c t) dt \\
 &= \int_0^T \cos^2(2\pi k f_c t) dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^T (1 + \cos(4\pi k f_c t)) dt \\
 &= \frac{T}{2}
 \end{aligned}$$

如果  $\langle f(t), g(t) \rangle = 0$ ，我們說  $f(t)$  和  $g(t)$  是正交的，根據以上的推導，我們可以說當  $k \neq n$  時， $\cos(2\pi k f_c t)$  和  $\cos(2\pi n f_c t)$  是正交的。

一旦我們發現  $\cos(2\pi k f_c t)$  和  $\cos(2\pi n f_c t)$  是正交的，我們就可以幫助接收者確定 Bit 1 和 Bit 2 是傳送什麼資料了。怎麼做呢？套一句俗語：“解鈴仍需，繫鈴人”。當初我們可以將一個位元乘上了一個 cosine 函數，現在我們仍要將收到的訊號  $s(t)$  乘上了一個 cosine 函數，然後再積分，就可以算出  $a$  和  $b$  了。

$s(t)=a \cos(2\pi k f_c t)+b \cos(2\pi n f_c t)$  如果我們要計算 $a$ ,就計算以下的內乘積:

$$\begin{aligned} & \langle s(t), \cos(2\pi k f_c t) \rangle \\ &= \langle a \cos(2\pi k f_c t) + b \cos(2\pi n f_c t), \cos(2\pi k f_c t) \rangle \\ &= \langle a \cos(2\pi k f_c t), \cos(2\pi k f_c t) \rangle + \langle b \cos(2\pi n f_c t), \cos(2\pi k f_c t) \rangle \\ &= \frac{aT}{2} + 0 \\ &= \frac{aT}{2} \end{aligned}$$

因為 $\langle \cos(2\pi k f_c t), \cos(2\pi n f_c t) \rangle = 0$

$$\text{所以 } a = \frac{2}{T} \langle s(t), \cos(2\pi k f_c t) \rangle$$

我們當然也可以用同樣的方法求出  $b$ .

$$b = \frac{2}{T} \langle s(t), \cos(2\pi n f_c t) \rangle$$

相信讀者一定會下一個結論,假設 Bit 1 用  $f(t)$  來表示, Bit 2 用  $g(t)$  來表示,最重要的是

$$\begin{aligned} & \langle f(t), g(t) \rangle = 0 \\ \text{而 } & \langle f(t), f(t) \rangle \neq 0 \\ & \langle g(t), g(t) \rangle \neq 0 \end{aligned}$$

就可以了.

舉例來說,我們令  $f(t) = \cos(2\pi f_c t)$ .  $g(t) = \sin(2\pi f_c t)$  結果是一樣的,因為

$$\begin{aligned} & \langle \cos(2\pi f_c t), \sin(2\pi f_c t) \rangle = 0 \\ & \langle \cos(2\pi f_c t), \cos(2\pi f_c t) \rangle = \frac{T}{2} \\ & \langle \sin(2\pi f_c t), \sin(2\pi f_c t) \rangle = \frac{T}{2} \end{aligned}$$

也就是說, Bit 1 送的是  $a \cos(2\pi f_c t)$ , 而 Bit 2 送的是  $b \sin(2\pi f_c t)$ , Bit 1 和 Bit 2 混合後的結果是  $s(t)$

$$s(t) = a \cos(2\pi f_c t) + b \sin(2\pi f_c t).$$

如果 Bit 1 是 1,則  $a=1$ , Bit 1 是 0, 則  $a=-1$   
同理如果 Bit 1 是 1,則  $b=1$ , Bit 1 是 0, 則  $b=-1$

$s(t)$ 有以下四種可能情形:

$$s(t) = a \cos(2\pi f_c t) + b \sin(2\pi f_c t).$$

$$s(t) = a \cos(2\pi f_c t) - b \sin(2\pi f_c t).$$

$$s(t) = -a \cos(2\pi f_c t) + b \sin(2\pi f_c t).$$

$$s(t) = -a \cos(2\pi f_c t) - b \sin(2\pi f_c t).$$

希望大家知道,我是介紹了如何混合兩個位元,我們當然可以混合更多的位元,ADSL 系統就是混合了 256 個位元.

也許我可以將我所講的做以下的結論:

- (1) 每一個位元(bit)都用一個類比訊號來表示.
- (2) 位元所用的類比訊號必須互相為正交的.
- (3) 接收者利用正交的性質可以決定每一個的位元的值.

通訊是一個非常有趣的學問,我在此歡迎各位到我們的網站來看我寫的有關通訊的講義.