

只知其一，不知其二

許介彥

大葉大學電機工程學系

chs@mail.dyu.edu.tw

最近的媒體常提到台灣已經進入「少子化」的時代；年輕一輩大概有許多人不知道，三十幾年前政府爲了抑制人口的成長，曾經大力推行所謂「家庭計畫」，鼓勵每對年輕夫婦「只」生兩個小孩就好，當時喊得很響亮的口號是「兩個孩子恰恰好」、「男孩女孩一樣好」；不曉得當時宣導的成效如何，我們身邊倒是不難發現在那個時代結婚而子女數果真是兩個的朋友；如果當時的一位國小老師在課堂上調查：「家裡有正好兩個小孩的人舉手」，或許全班大部分人都會舉手吧。

現代機率理論 (Probability Theory) 裡有許多有趣的問題和小孩的性別有關，這類問題通常假設人類的每一胎生男生女的機率各是 $1/2$ 。跟數學的其他領域比較起來，機率論裡題目看似簡單而答案卻出人意料之外的問題特別多，本文將介紹幾個例子，您不妨利用這個機會測試一下自己的「PQ」高不高。

先看一個簡單的問題。如果某個家庭有四個小孩，請您憑直覺猜猜看，以性別而言，這四個小孩是由兩男兩女組成的機率比較大還是由三男一女或三女一男組成的機率比較大？一般人常會覺得既然每一胎是男孩或女孩的機率各是 $1/2$ ，四個小孩的性別分配得很平均，男女各半是很自然的事，機率似乎比三男一女或三女一男的機率來得大。事實上，由於每個小孩的性別有男女兩種可能，四個小孩搭配起來總共有 $2^4 = 16$ 種可能（即 BBBB、BBBG、BBGB、……等，B 表 boy，G 表 girl），其中兩男兩女的情形占了 $C(4, 2) = 6$ 種，發生的機率爲 $6/16 = 3/8$ ，而三男一女或三女一男的情形則有 $2C(4, 3) = 8$ 種，發生的機率爲 $8/16 = 1/2$ ，比兩男兩女的 $3/8$ 還大。

以前的農業社會裡，「多子多孫多福氣」的觀念相當普遍，一對夫婦生下七、八個小孩是很平常的事（已經算「客氣」的了）；對一對生了八個小孩的夫婦而言，男女各四個的情形其實不太容易發生，您不妨自己算算看，發生的機率只有大約 0.27。

假設您今天到一位新認識的朋友張三家中作客，閒聊中您問他：「你有幾個小孩？」他回答：「兩個。」這時您看到張三的一個唸附近某女子中學的小孩放學回來了，如果此時張三請您猜猜看他的另一個小孩是男孩或女孩，您要猜什麼才有較大的機會猜中？

一般人會覺得這個問題相當簡單；既然每一胎是男孩或女孩的機率各是 $1/2$ ，張三的另一個小孩是男孩或女孩的機率當然各是 $1/2$ ，因此不論猜男孩或

女孩，猜中的機率都是一樣的——如果您這樣想的話就錯了。正確的作法是應該猜男孩，這樣一來您猜對的機率將是猜錯的機率的兩倍；也就是說，張三的另一個小孩是男孩的機率其實是 $2/3$ 。

怎麼可能！您也許覺得不可置信，不是才說過每一胎是男孩或女孩的機率都是 $1/2$ 嗎？每個孩子單獨來看確實是如此，不過您已經知道張三的兩個小孩當中有至少一個是女孩了，這項資訊其實可以讓您對張三的另一個小孩的性別作出更好的評估。以性別而言，張三的兩個小孩總共有BB、BG、GB、GG四種可能，而且發生的機率都一樣，都是 $1/4$ 。當您知道張三的兩個小孩中有至少一個女孩後，BB的可能性就被排除了，只剩下BG、GB、GG三種可能，發生的機率各是 $1/3$ ，而這三種可能中，張三的另一個小孩是男孩的情形占了兩種（BG和GB），因此張三的另一個小孩是男孩的機率為 $2/3$ 。

如果您還沒被我說服的話可以想像這樣一個場景：某個學校的大禮堂裡面正在舉行家長座談，每個學生都有一名家長到學校來開會。開完會後司儀宣布：「有正好兩個小孩的家長請留下，其餘的家長請離開。」假設這時候總共有 100 名家長留了下來；如果完全符合機率的比列，我們可以預期這 100 人中，兩個小孩的性別為BB、BG、GB、GG的家長各有 25 位。如果司儀接著宣布：「你的兩個小孩中有女孩的請舉手。」此時會有 75 人舉手；如果司儀繼續宣布：「現在舉手的人當中，小孩是一男一女的人請把你的另一隻手也舉起來。」這時您將看到剛才的 75 人中有 50 個人將另一隻手也舉了起來（沒錯吧？），這 50 個人在 75 人中所占的比例為 $2/3$ ，正是我們前面所想要闡明，張三的另一個小孩是男孩的機率。

如果當您看到張三的女兒回來時，張三告訴您這是他的兩個孩子中的老大，那麼張三的老二是男生的機率是多少？答案會變成是 $1/2$ ，因為知道老大的性別對判斷老二的性別並沒有幫助，所以情況就回到了我們一開始對人類的每一胎生男生女的機率各是 $1/2$ 的假設。您看出前後兩個問題的不同了嗎？請再試一個類似的問題：如果張三總共有四個小孩，而您已經看到其中三個小孩，三個都是女孩，那麼他的另一個小孩是男孩的機率是多少？正確答案是 $4/5$ ，您自己算算看。

請注意前面的論述並不意味著：當我們去馬路上任意找一位女生問她有幾個兄弟姐妹，如果她回答說有一個，那麼我們就可以推斷她的這位兄弟姐妹是男生的機率為 $2/3$ ；雖然看起來差不多，不過這其實是不一樣的問題，您知道為什麼嗎？

我們可以沿用前面大禮堂的例子來作說明。現在假設在大禮堂裡面的並不是前述 100 個各自擁有兩個小孩的家長，而是這些家長所擁有的 200 名子女。如果完全符合機率的比列，那麼這 200 人中會有男孩女孩各 100 人。如果司儀請所有的男孩先離開，那麼禮堂裡將剩下 100 個女孩，她們每個人都有一個兄弟姐妹，我們可以預期其中有一半的女生的兄弟姐妹是男生，另一半的女生的兄弟姐妹是女生，因此我們的新問題的答案為 $1/2$ ；也就是說，如果司儀對這 100 名女孩宣

布：「妳的兄弟姐妹是男生的請舉手。」那麼將會有 50 個女孩舉手，這 50 個女孩在 100 個女孩中所占的比例為 $1/2$ 。

前後兩個問題到底有什麼差別呢？前面的問題相當於是在所有有兩個小孩的家庭中隨機選出一個「家庭」，然後問：如果這個家庭有至少一個女孩，那麼這個家庭有男孩的機率是多少？後面的問題則是在所有來自有兩個小孩的家庭的小孩中隨機選出一個「小孩」，然後問：如果這個小孩是女孩，那麼她的兄弟姐妹是男孩的機率是多少？請體會其差異。

機率論裡面跟前面的問題相關的還有一個也常被提起的「三張卡片」問題：假設我有大小相同的三張卡片，其中一張兩面都是紅色，另一張是一面紅一面白，還有一張兩面都是白色。我將這三張卡片放在一個黑箱子裡，請您閉上眼睛伸手從這個箱子隨機摸出一張卡片來平放在桌上，然後才將眼睛張開，如果此時您看到桌上的卡片朝上的一面是紅色，那麼它的另一面也是紅色的機率是多少？

一般人憑直覺常會認為答案是 $1/2$ ，因為既然看到桌上的卡片朝上的一面是紅色，它已經不可能是那張兩面都是白色的卡片了，在剩下的兩張有紅色面的卡片中，有一張的紅色面的另一面是紅色，有一張的紅色面的另一面是白色，因此桌上的卡片的另一面是紅色的機率為 $1/2$ ——很可惜，這樣想就錯了。

這個問題的關鍵是在：有紅色面的兩張卡片中，由於兩面都是紅色的那張卡片的每一面都可能是我們所見桌上卡片朝上的一面，因此兩面都是紅色的卡片是桌上的卡片的機率其實是另一張卡片的兩倍。說得再詳細一點，如果我們將這三張卡片的六個面分別取名字，兩面都是紅色的卡片的兩面叫做 R_1 和 R_2 ，一面紅一面白的卡片的兩面分別叫做 R_3 和 W_1 ，兩面都是白色的卡片的兩面叫做 W_2 和 W_3 ，那麼桌上的卡片朝上的一面有可能是 R_1 、 R_2 或 R_3 ，機率各是 $1/3$ ；如果是 R_1 或 R_2 ，那麼卡片的另一面顯然是紅色，只有當是 R_3 時另一面才是白色，因此桌上的卡片的另一面是紅色的機率其實是 $2/3$ 。

接下來請看最後一個問題：假設我有一個袋子裡面裝著一顆球，這顆球可能是一顆黑球或一顆白球，機率各是 $1/2$ 。現在我再拿一顆白球放入這個袋子裡，然後從袋子裡隨機摸出一顆球。如果摸出來的這顆球是白球，此時袋子裡的球是白球的機率是多少？

一個簡單的想法是：對袋子而言，既然有一顆白球被放了進去又被拿了出來，因此就像是什麼事情都沒發生一樣，袋中剩下的球是白球的機率因此是 $1/2$ ，也就是跟一開始的情況一樣——這當然是錯的，因為放入的白球與取出的白球未必是同一顆。

讓我們再度為道具取名字；一開始袋子裡的球如果是白球就叫它 W_1 ，如果是黑球就叫它 B ，而後來加入的白球叫做 W_2 。當我從袋中取出一顆白球後有下列三種可能的情況：

袋中的球	取出的球
------	------

W_1	W_2
W_2	W_1
B	W_2

這三種情形發生的機率各是 $1/3$ ，因此袋中剩下的球是白球的機率為 $2/3$ 。

我們還可以探討更具一般性的情形：假設我有甲和乙兩個袋子，一開始甲袋裝著 a 顆白球和 b 顆黑球（ a 為任意正整數），乙袋則是空的。我閉著眼睛從甲袋隨機摸出一顆球放入乙袋，張開眼睛後將一顆白球加入乙袋，再從乙袋隨機摸出一顆球。如果這顆球是白球，那麼乙袋裡的另一顆球是白球的機率是多少？剛才的問題其實是這個問題在 $a = b$ 時的特例。請您自己算算看，當 $a = 3$ 且 $b = 2$ 時，乙袋所剩的球是白球的機率是多少？答案是 $3/4$ 。

本文介紹的幾個問題都是在某個事件已經發生的情形下想求出另一個事件發生的機率，在述語上算是屬於「條件機率」（conditional probability）的問題。如果您學過機率的話，本文的問題也都可以利用條件機率基本的 $P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$ 關係來求解，也都算是不錯的練習，您不妨自己試試。